首都大学東京

2017年 都市教養（文系）第1問

$\boxed{1}$ kを正の実数とし，2次方程式 $8x^2-12kx+3k^2+8=0$ は $\sin\theta+2\cos\theta$，$2\sin\theta+\cos\theta$ を解に持つとする．ただし，$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$ とする．以下の問いに答えなさい．

(1) $\sin\theta+\cos\theta$，$\sin\theta\cos\theta$ をそれぞれ k を用いて表しなさい．

(2) k の値を求めなさい．

(3) $\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めなさい．

(1) 解と係数の関係より，

$$(\sin\theta+2\cos\theta)+(2\sin\theta+\cos\theta)=\frac{3}{2}k \quad \cdots ①$$

$$(\sin\theta+2\cos\theta)(2\sin\theta+\cos\theta)=\frac{3k^2+8}{8} \quad \cdots ②$$

①より，$3(\sin\theta+\cos\theta)=\frac{3}{2}k$　よって，$\underline{\sin\theta+\cos\theta=\frac{k}{2}}$ //

②より，$\underbrace{2\sin^2\theta+2\cos^2\theta}_{=2}+5\sin\theta\cos\theta=\frac{3k^2+8}{8}$

$\therefore\ 5\sin\theta\cos\theta=\frac{3k^2-8}{8}$　$\therefore\ \underline{\sin\theta\cos\theta=\frac{3k^2-8}{40}}$ //

(2) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$ に (1) の結果を代入して，

$$\frac{k^2}{4}=1+\frac{3k^2-8}{20} \iff 5k^2=20+3k^2-8$$
$$\iff k^2=6$$

$k>0$ より，$\underline{k=\sqrt{6}}$ //

(3) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$ であるから，$\sin\theta, \cos\theta$ は方程式

$$t^2-\frac{\sqrt{6}}{2}t+\frac{1}{4}=0 \iff 4t^2-2\sqrt{6}+1=0$$

の解である．$t=\frac{2\sqrt{6}\pm\sqrt{24-4\cdot4\cdot1}}{8}=\frac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4}$

ここで，$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ より，$\sin\theta\leqq\cos\theta$ であるから

$$\underline{\sin\theta=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\ \cos\theta=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\ //$$