

2016年工・情報科学・社シス科学第2問



2 次の各問に答えよ。

(1) 実数 x, y は $x \geq \sqrt[3]{2}, y \geq 32, x^6 y = 256$ をみたしている。 $F = (\log_{16} x)(\log_2 y)$ は、 $t = \log_2 x$ とおくと

$$F = \frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}^2} t^2 + \boxed{\text{エ}} t$$

と表される。 t の取り得る値の範囲は $\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}^3} \leq t \leq \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}^2}$ であり、 F の最大値は $\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}^8}$ 、最小値は $\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}^2}$ である。

(2) x の関数 $f(x) = x(x^2 + ax + b)$ (a, b は定数) がある。 xy 平面において、原点 O と点 $A(5, f(5))$ を結ぶ線分 OA を $4:1$ に内分する点を B とする。 B の x 座標は $\boxed{\text{ス}}$ であり、 B が曲線 $y = f(x)$ 上にあるとき、 $a = \boxed{\text{セソ}}$ である。 さらに、 $f(x)$ が $x = \boxed{\text{ス}}$ で極値をとるとき、 $b = \boxed{\text{タチ}}$ であり、 $f(x)$ の極大値は $\boxed{\text{ツテ}}$ である。

$$(1) F = \frac{\log_2 x}{\log_2 16} \cdot \log_2 \frac{256}{x^6}$$

$$= \frac{1}{4} t \cdot (8 - 6t)$$

$$= -\frac{3}{2} t^2 + 2t$$

$$x \geq \sqrt[3]{2}, y \geq 32, x^6 y = 256 \text{ より } \sqrt[3]{2} \leq x \leq \sqrt{2} \quad \therefore \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{1}{2}$$

$$F = -\frac{3}{2} \left(t - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$$

$$\therefore \text{最大値は } \frac{5}{8} \text{ (} t = \frac{1}{2} \text{ のとき), 最小値は } \frac{1}{2} \text{ (} t = \frac{1}{3} \text{ のとき)}$$

$$(2) A(5, 25a + 5b + 125) \quad \therefore B \text{ の } x \text{ 座標は } \frac{4 \cdot 5}{5} = 4, \quad B(4, 20a + 4b + 100)$$

$$20a + 4b + 100 = 4(16 + 4a + b) \text{ より } a = -9$$

$$f'(4) = 0 \text{ より } f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \quad \therefore f'(4) = 48 + 8a + b = 0$$

$$a = -9 \text{ より } b = 24$$

$$\text{よって } f(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x-2)(x-4) \quad \leftarrow \text{増減表}$$

$$\text{極大値は } f(2) = 2 \cdot (4 - 18 + 24) = 20$$

は省略した