

2016年工・情報科学・社シス科学第4問

4 x の2次関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$, \dots , $f_n(x)$, \dots を条件

$$f_1(x) = x^2 - 5x,$$

$$f_{n+1}(x) = x^2 \int_0^2 \{t f_n'(t) - f_n(t)\} dt + x \int_0^2 f_n(t) dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める. さらに, 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を

$$f_n(x) = a_n x^2 + b_n x$$

により定める. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $f_n'(x) = \boxed{\text{ア}}$ $a_n x + b_n$ であり, 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は

$$a_{n+1} = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}} a_n, \quad b_{n+1} = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} a_n + \boxed{\text{カ}} b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

をみたとす.

(2) $a_n = \left(\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \right)^{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) であり, $c_n = \frac{b_n}{\boxed{\text{カ}}^{n-1}}$ とおくと, $c_{n+1} - c_n = \left(\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \right)^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つ.

(3) $f_n(x) = \left(\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \right)^{n-1} x^2 + \left\{ \boxed{\text{サ}} \cdot \left(\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} \right)^{n-1} - \boxed{\text{セ}} \cdot \boxed{\text{ソ}}^{n-1} \right\} x$ である.

(4) x の方程式 $f_n(x) = 0$ の $x = 0$ とは異なる解を $x = p_n$ とする. 不等式 $p_n > M$ がすべての正の整数 n に対して成り立つような定数 M のうち, 最大の整数は $M = \boxed{\text{タチ}}$ であり, $\boxed{\text{タチ}} < p_n < \boxed{\text{タチ}} + 1$ となるような最小の n は $\boxed{\text{ツ}}$ である. ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする.