

2013年第24問

24 曲線  $C_1: y = x^3 + 5x^2 + 9x + 9$ , 曲線  $C_2: y = -2x^2 + ax + b$  について考える. 曲線  $C_1$  と曲線  $C_2$  は点  $P(1, 24)$  で接する. 曲線  $C_2$  と  $x$  軸で囲まれる面積を  $S$  とする.  $\frac{9S}{13^3}$  の値を求めよ.

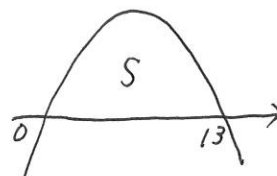
$$f(x) = x^3 + 5x^2 + 9x + 9, \quad g(x) = -2x^2 + ax + b \quad \text{とあ'く'と.}$$

$$g(1) = 24 \quad \text{より} \quad a + b = 26 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{また, } f'(x) = 3x^2 + 10x + 9, \quad g'(x) = -4x + a$$

$$\text{であり, } f'(1) = g'(1) \quad \text{より} \quad 22 = a - 4 \quad \therefore a = 26, \quad b = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore C_2: y &= -2x^2 + 26x \\ &= -2x(x - 13) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \therefore S &= \int_0^{13} (-2x^2 + 26x) dx \\ &= -2 \int_0^{13} x(x - 13) dx \\ &= -2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) (13 - 0)^3 \\ &= \frac{13^3}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{9S}{13^3} = \underline{\underline{3}}$$