千歳科学技術大学

2013年 数IAIIB型（I期） 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 次の各問いに答えなさい．

(1) $a^3+b^3+c^3-3abc$ を因数分解しなさい．

(2) ${}_n\mathrm{P}_r = \boxed{} \times {}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$ が成り立つとき，$\boxed{}$ にあてはまる文字を求めなさい．

(3) $a_1=5$，$a_{n+1}=3a_n-2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい．

(4) $y=x+\dfrac{7}{x+2}$ $(x>0)$ の最小値を求めなさい．

(5) $a>0$，$a \neq 1$，$xyz \neq 0$ とする．$2^x=3^y=a^z$ と $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{z}$ が成り立つとき，a の値を求めなさい．

(1) (与式) $= \underline{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}$ //

(2) ${}_n\mathrm{P}_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$，${}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}=(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$

よって，${}_n\mathrm{P}_r = \underline{n} \times {}_{n-1}\mathrm{P}_{r-1}$ //

(3) $a_{n+1}-1=3(a_n-1)$

∴ 数列 $\{a_n-1\}$ は初項 $a_1-1=4$，公比3の等比数列

∴ $a_n-1=4\cdot 3^{n-1}$　　∴ $\underline{a_n=4\cdot 3^{n-1}+1}$ //

(4) $y=(x+2)+\dfrac{7}{x+2}-2$ …①

ここで，$x+2>0$，$\dfrac{7}{x+2}>0$ なので，相加平均・相乗平均の関係より

$$x+2+\frac{7}{x+2} \geqq 2\sqrt{(x+2)\cdot\frac{7}{x+2}} = 2\sqrt{7}$$

（等号成立は $x+2=\dfrac{7}{x+2} \Leftrightarrow x=\sqrt{7}-2$）

よって．①より．y の最小値は．$\underline{2\sqrt{7}-2}$ //

(5) $2^x=a^z$ より．$x=z\log_2 a$，$3^y=a^z$ より．$y=z\log_3 a$

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{z}$ に代入して．$\dfrac{1}{z\log_2 a}+\dfrac{1}{z\log_3 a}=\dfrac{1}{z}$

∴ $\dfrac{\log_a 2}{\log_a a}+\dfrac{\log_a 3}{\log_a a}=1$　　∴ $\log_a 6=1$　　∴ $\underline{a=6}$ //