2013年 数IAIIB型（I期）第3問

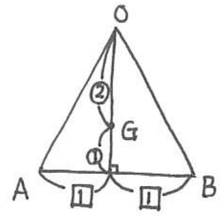
数理 石井K

$\boxed{3}$ 各辺の長さが1である正四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき以下の問いに答えなさい．

(1) △OABの重心をGとするとき，$\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表しなさい．

(2) 2つのベクトル $\overrightarrow{OG}$ と $\overrightarrow{GC}$ の内積 $\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{GC}$ を求めなさい．

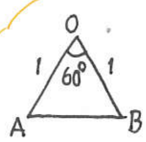
(3) GCの長さを求めなさい．



(1) 重心の定義より．$\overrightarrow{OG}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}\right)=\underline{\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}}$ //

(2) $\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OG}=-\dfrac{1}{3}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}+\vec{c}$

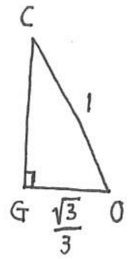
$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{1}{2}$ より．



$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60°$
$=\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{GC}&=\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{c}\right)\\
&=\frac{1}{9}(\vec{a}+\vec{b})\cdot(-\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c})\\
&=\frac{1}{9}\left(-|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+3\vec{c}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2+3\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\\
&=\frac{1}{9}\left(-1-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-1+\frac{3}{2}\right)\\
&=\underline{0}
\end{aligned}$$ //

(3) (2)より．OG ⊥ GC なので



△OCGは ∠G = 90° の直角三角形

$OC=1$，$OG=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ より

$$\begin{aligned}
GC^2&=1^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\\
&=\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$\therefore\ \underline{GC=\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$ //