

2013年 第3問

 数理
石井K

 3 関数 $y = \sin^3 x + \cos^3 x$ ($0 \leq x < 2\pi$) について、以下の問いに答えよ。

- (1) $t = \sin x + \cos x$ として、 $\sin x \cos x$ と y をそれぞれ t の関数で表せ。
 (2) (1) で定めた t のとりうる値の範囲を求めよ。
 (3) y の最大値と最小値、および、そのときの x の値をそれぞれ求めよ。

 (1) $t = \sin x + \cos x$ の両辺を 2 乗して。

$$t^2 = 1 + 2\sin x \cos x \quad \therefore \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2} //$$

$$\begin{aligned} y &= (\sin x + \cos x)^3 - 3\sin x \cos x (\sin x + \cos x) \\ &= t^3 - 3 \cdot \frac{t^2 - 1}{2} \cdot t \\ &= \underline{-\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t} // \end{aligned}$$

(2) $t = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$, $\frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$ より

$$\underline{-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}} //$$

(3) $y' = -\frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}$

$$= -\frac{3}{2}(t+1)(t-1)$$

t	$-\sqrt{2}$	\dots	-1	\dots	1	\dots	$\sqrt{2}$
y'	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
y	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	\downarrow	-1	\uparrow	1	\downarrow	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

右の増減表より。

 y の最大値は 1 ($x = 0, \frac{\pi}{2}$ のとき)

$$t = 1 \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ より}$$

$$x = 0, \frac{\pi}{2}$$

 y の最小値は -1 ($x = \pi, \frac{3}{2}\pi$ のとき)

$$// \quad t = -1 \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ より}$$

$$x = \pi, \frac{3}{2}\pi$$