



2012年理系第2問

増田

2 表の出る確率が  $p$ 、裏の出る確率が  $q$  である硬貨を用意する。ここで  $p, q$  は正の定数で、 $p+q=1$  を満たすとする。座標平面における領域  $D$  を

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$$

とし、 $D$  上を動く点  $Q$  を考える。 $Q$  は点  $(0, 0)$  から出発し、硬貨を投げて表が出れば  $x$  軸方向に  $+1$  だけ進み、裏が出れば  $y$  軸方向に  $+1$  だけ進む。なお、この規則で  $D$  上を進めないときには、その回はその点にとどまるものとする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) 硬貨を 4 回投げて  $Q$  が点  $(2, 2)$  に到達する確率  $P_4$  を求めよ。
- (2) 硬貨を 5 回投げて 5 回目に初めて  $Q$  が点  $(2, 2)$  に到達する確率  $P_5$  を求めよ。
- (3)  $P_5 = \frac{1}{9}$  のとき、 $p$  の値を求めよ。

(1) 4 回投げて  $Q$  が点  $(2, 2)$  に到達するには、4 回中 2 回表、2 回裏が出ればよいので、

$$\begin{aligned} P_4 &= {}_4C_2 p^2 q^2 \\ &= 6 p^2 q^2 \end{aligned}$$

(2) i) 4 回目は  $(1, 2) \rightarrow$  5 回目に表が出て  $(2, 2)$   
 (4 回中、表が 1 回、裏が 3 回)

$${}_4C_1 p q^3 \times p = 4 p^2 q^3$$

ii) 4 回目は  $(2, 1) \rightarrow$  5 回目に裏が出て  $(2, 2)$   
 (4 回中、表が 3 回、裏が 1 回)

$${}_4C_1 p^3 q \times q = 4 p^3 q^2$$

$$\begin{aligned} P_5 &= 4 p^2 q^3 + 4 p^3 q^2 \\ &= 4 p^2 q^2 (p+q) = 4 p^2 q^2 \end{aligned}$$

$$(3) P_5 = 4 p^2 q^2 = \frac{1}{9}$$

$$(pq)^2 = \frac{1}{36}$$

$$\therefore pq = \frac{1}{6} \quad (\because p > 0, q > 0)$$

$$q = \frac{1}{6p} \text{ を } p+q=1 \text{ に代入して、}$$

$$p + \frac{1}{6p} = 1$$

$$p^2 - p + \frac{1}{6} = 0$$

$$6p^2 - 6p + 1 = 0$$

$$p = \frac{3 \pm \sqrt{9-6}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$$