



2016年工学部(前期M方式)第5問

5 条件 $a_1 = \frac{2}{5}$, $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{2n+7}{6}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。このとき、
 $a_n = \frac{\boxed{\text{ア}}}{n^2 + \boxed{\text{イ}}n + \boxed{\text{ウ}}}$ であり、 $\sum_{n=1}^{16} a_n = \frac{\boxed{\text{エ}}\boxed{\text{オ}}\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}\boxed{\text{ク}}}$ である。

$$b_n = \frac{1}{a_n} \text{ とおくと, } b_{n+1} - b_n = \frac{2n+7}{6}$$

よって、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+7}{6} \\ &= \frac{5}{2} + \frac{1}{6} \{n(n-1) + 7(n-1)\} \\ &= \frac{1}{6} (n^2 + 6n + 8) \end{aligned}$$

これは、 $n=1$ のときも成り立っている。

$$\text{よって, } a_n = \frac{6}{n^2 + 6n + 8}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{16} a_n &= \sum_{n=1}^{16} \frac{6}{(n+2)(n+4)} \\ &= \sum_{n=1}^{16} 6 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+4} \right) \\ &= 3 \sum_{n=1}^{16} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+4} \right) \\ &= 3 \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) + \dots + \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{19} \right) + \left(\frac{1}{18} - \frac{1}{20} \right) \right\} \\ &= 3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{19} - \frac{1}{20} \right) \\ &= 3 \cdot \frac{380 + 285 - 60 - 57}{1140} \\ &= \frac{137}{95} \end{aligned}$$