



2012年理工（理数選抜）第4問

4  $f(x) = \sin\left(\log \frac{1}{x}\right)$  ( $0 < x \leq 1$ ) とおく.  $f(x) = 0$  となるすべての  $x$  を, 大きい順に  $a_0, a_1, a_2, \dots$  とする. 以下の問いに答えよ.

- (1)  $a_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) を求めよ.  
 (2) 正の定数  $a, b$  に対し

$$\frac{d}{dx}(Ae^{-ax} \cos bx + Be^{-ax} \sin bx) = e^{-ax} \cos bx$$

を満たす定数  $A, B$  を求め, 不定積分

$$\int e^{-ax} \cos bx \, dx$$

を求めよ.

- (3)  $b_n = \int_{a_{n+1}}^{a_n} \{f(x)\}^2 \, dx$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) を,  $t = \log \frac{1}{x}$  とおくことにより求めよ.  
 (4) (3) で得られた数列  $\{b_n\}$  に対し, 無限級数  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  の和を求めよ.