



2012年理工(一般)第2問

2 次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び、その記号をマークせよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。

a を1より大きい実数とする。 xy 平面において、 x 軸、 y 軸、直線 $x=1$ と曲線 $y=a^x$ で囲まれる部分の面積を近似的に計算したい。 n を自然数とし、 $k=1, 2, \dots, n$ とする。また、 $f(x)$ は $0 \leq x \leq 1$ において $f(x) > 0$ を満たす連続関数とする。

(1) 4点 $\left(\frac{k-1}{n}, 0\right)$, $\left(\frac{k}{n}, 0\right)$, $\left(\frac{k}{n}, f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$, $\left(\frac{k-1}{n}, f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)$ を頂点にもつ台形の面積を M_k とする。このとき $M_k = \boxed{\text{キ}}$ となる。とくに $f(x) = a^x$ であれば、面積の和 $S_n = M_1 + M_2 + \dots + M_n$ は $\boxed{\text{ク}}$ となる。ここで、極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \boxed{\text{ケ}}$ を用いると、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \boxed{\text{コ}}$ と計算される。

(2) 以下では、曲線 $y = f(x)$ は下に凸とする。

3点 $\left(\frac{k-1}{n}, f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)$, $\left(\frac{2k-1}{2n}, f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\right)$, $\left(\frac{k}{n}, f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ を通る放物線を

$$C_k: y = \alpha \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right)^2 + \beta \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) + \gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma \text{ は定数})$$

とおく。 x 軸、直線 $x = \frac{k-1}{n}$ 、直線 $x = \frac{k}{n}$ と放物線 C_k で囲まれる部分の面積を N_k とおくとき、 $N_k = \boxed{\text{サ}}$ となる。とくに $f(x) = a^x$ であれば、面積の和 $N_1 + N_2 + \dots + N_n$ は $\boxed{\text{シ}}$ となる。

• ケ、コの解答群

- ㉑ e^a ㉒ e^{-a} ㉓ $\frac{e^a}{a-1}$ ㉔ $(a-1)e^a$ ㉕ $(a-1)e^{-a}$
 ㉖ $\log a$ ㉗ $\frac{1}{\log a}$ ㉘ $\frac{\log a}{a-1}$ ㉙ $\frac{a-1}{\log a}$ ㉚ $(a-1)\log a$

• キ、サの解答群

- ㉑ $\frac{1}{n} \left\{ f\left(\frac{k-1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right) \right\}$
 ㉒ $\frac{1}{2n} \left\{ f\left(\frac{k-1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right) \right\}$
 ㉓ $\frac{1}{3n} \left\{ f\left(\frac{k-1}{n}\right) + f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right) \right\}$
 ㉔ $\frac{1}{4n} \left\{ f\left(\frac{k-1}{n}\right) + 2f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right) \right\}$
 ㉕ $\frac{1}{5n} \left\{ f\left(\frac{k-1}{n}\right) + 3f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right) \right\}$
 ㉖ $\frac{1}{6n} \left\{ f\left(\frac{k-1}{n}\right) + 4f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right) \right\}$



• ク, シの解答群

Ⓐ $\frac{(a^n - 1)\sqrt{a}}{n(a - 1)}$

Ⓑ $\frac{a^{\frac{1}{2n}}(a - 1)}{n(a^{\frac{1}{n}} - 1)}$

Ⓒ $\frac{(a + 1)(a^n - 1)}{n(a - 1)}$

Ⓓ $\frac{(a^{\frac{1}{n}} + 1)(a - 1)}{n(a^{\frac{1}{n}} - 1)}$

Ⓔ $\frac{(a + 1)(a^n - 1)}{2n(a - 1)}$

Ⓕ $\frac{(a^{\frac{1}{n}} + 1)(a - 1)}{2n(a^{\frac{1}{n}} - 1)}$

Ⓖ $\frac{(a^{\frac{1}{n}} + a^{\frac{1}{2n}} + 1)(a - 1)}{n(a^{\frac{1}{n}} - 1)}$

Ⓖ $\frac{(a^{\frac{1}{n}} + a^{\frac{1}{2n}} + 1)(a - 1)}{3n(a^{\frac{1}{n}} - 1)}$

Ⓘ $\frac{(a^{\frac{1}{n}} + 2a^{\frac{1}{2n}} + 1)(a - 1)}{4n(a^{\frac{1}{n}} - 1)}$

Ⓙ $\frac{(a + 3\sqrt{a} + 1)(a^n - 1)}{5n(a - 1)}$

Ⓚ $\frac{(a^{\frac{1}{n}} + 4a^{\frac{1}{2n}} + 1)(a - 1)}{6n(a^{\frac{1}{n}} - 1)}$