



2012年理工（一般）第4問

4 関数 $f(x)$ の第 n 次導関数を $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$ で表す。いま、自然数 n に対して関数 $H_n(x)$ を次で定義する。

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

以下の問いに答えよ。

- (1) $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$ を求めよ。
- (2) 導関数 $\frac{d}{dx} H_n(x)$ を $H_n(x)$ と $H_{n+1}(x)$ を用いて表せ。さらに、 n に関する数学的帰納法により $H_n(x)$ が n 次多項式（整式）であることを証明せよ。
- (3) $n \geq 3$ のとき、定積分

$$S_n(a) = \int_0^a x H_n(x) e^{-x^2} dx$$

を $H_{n-1}(a)$, $H_{n-2}(a)$, $H_{n-2}(0)$ を用いて表せ。ただし、 a は実数とする。

- (4) $n = 6$ のとき、極限值 $\lim_{a \rightarrow \infty} S_6(a)$ を求めよ。

必要ならば、自然数 k に対して $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k e^{-x^2} = 0$ が成り立つことを用いてよい。