



2012年 理工（理数選抜）第2問

2 2次関数や3次関数  $y = f(x)$  から新しい関数  $F(x)$  を次のように作る.

実数  $x$  に対して,  $f(\alpha) = f(x)$  を満たす最大の  $\alpha$  をとり

$$F(x) = \alpha - x$$

と定める.

例えば,  $f(x) = x^2$  の場合, 実数  $x$  に対して  $\alpha$  の方程式  $f(\alpha) = f(x)$  は  $\alpha^2 = x^2$  であり,  $\alpha = \pm x$  となる. したがって, その2つの  $\alpha$  のうち大きい方をとれば次を得る.

$$x < 0 \text{ のとき } \alpha = -x \text{ により } F(x) = \alpha - x = -2x = 2|x|$$

$$x \geq 0 \text{ のとき } \alpha = x \text{ により } F(x) = \alpha - x = 0$$

以下では  $f(x) = x^3 - 3b^2x$  ( $b > 0$ ) に対して, 上の操作で定めた関数  $F(x)$  を考える.

- (1)  $F(-b)$ ,  $F(0)$ ,  $F(b)$  の値を求めよ.
- (2)  $F(x) = 0$  となる  $x$  の範囲を求めよ. また  $F(x) > 0$  となる  $x$  の範囲を求めよ.
- (3)  $F(x) > 0$  となる  $x$  に対し,  $f(\alpha) = f(x)$  を満たす最大の  $\alpha$  を  $x$  の式で表せ.
- (4) 関数  $y = F(x)$  を求め, そのグラフの概形をかけ. また  $F(x)$  の最大値を求めよ.