中央大学

2012年 理工（理数選抜） 第2問

$\boxed{2}$ 2次関数や3次関数 $y=f(x)$ から新しい関数 $F(x)$ を次のように作る．

実数 x に対して，$f(\alpha)=f(x)$ を満たす最大の α をとり

$$F(x)=\alpha-x$$

と定める．

例えば，$f(x)=x^2$ の場合，実数 x に対して α の方程式 $f(\alpha)=f(x)$ は $\alpha^2=x^2$ であり，$\alpha=\pm x$ となる．したがって，その2つの α のうち大きい方をとれば次を得る．

$x<0$ のとき $\alpha=-x$ により $F(x)=\alpha-x=-2x=2|x|$
$x\geqq 0$ のとき $\alpha=x$ により $F(x)=\alpha-x=0$

以下では $f(x)=x^3-3b^2x$ $(b>0)$ に対して，上の操作で定めた関数 $F(x)$ を考える．

(1) $F(-b)$，$F(0)$，$F(b)$ の値を求めよ．
(2) $F(x)=0$ となる x の範囲を求めよ．また $F(x)>0$ となる x の範囲を求めよ．
(3) $F(x)>0$ となる x に対し，$f(\alpha)=f(x)$ を満たす最大の α を x の式で表せ．
(4) 関数 $y=F(x)$ を求め，そのグラフの概形をかけ．また $F(x)$ の最大値を求めよ．