



2012年理工(一般)第2問

2 次の問題文の空欄にもっとも適する答えを解答群から選び、その記号をマークせよ。ただし、同じ記号を2度以上用いてもよい。

$a$  を1より大きい実数とする。 $xy$  平面において、 $x$  軸、 $y$  軸、直線  $x=1$  と曲線  $y=a^x$  で囲まれる部分の面積を近似的に計算したい。 $n$  を自然数とし、 $k=1, 2, \dots, n$  とする。また、 $f(x)$  は  $0 \leq x \leq 1$  において  $f(x) > 0$  を満たす連続関数とする。

(1) 4点  $\left(\frac{k-1}{n}, 0\right)$ ,  $\left(\frac{k}{n}, 0\right)$ ,  $\left(\frac{k}{n}, f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ ,  $\left(\frac{k-1}{n}, f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)$  を頂点にもつ台形の面積を  $M_k$  とする。このとき  $M_k = \boxed{\text{キ}}$  となる。とくに  $f(x) = a^x$  であれば、面積の和  $S_n = M_1 + M_2 + \dots + M_n$  は  $\boxed{\text{ク}}$  となる。ここで、極限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \boxed{\text{ケ}}$  を用いると、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \boxed{\text{コ}}$  と計算される。

(2) 以下では、曲線  $y = f(x)$  は下に凸とする。

3点  $\left(\frac{k-1}{n}, f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)$ ,  $\left(\frac{2k-1}{2n}, f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\right)$ ,  $\left(\frac{k}{n}, f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$  を通る放物線を

$$C_k: y = \alpha \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right)^2 + \beta \left(x - \frac{2k-1}{2n}\right) + \gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma \text{ は定数})$$

とおく。 $x$  軸、直線  $x = \frac{k-1}{n}$ 、直線  $x = \frac{k}{n}$  と放物線  $C_k$  で囲まれる部分の面積を  $N_k$  とおくとき、 $N_k = \boxed{\text{サ}}$  となる。とくに  $f(x) = a^x$  であれば、面積の和  $N_1 + N_2 + \dots + N_n$  は  $\boxed{\text{シ}}$  となる。

• ケ、コの解答群

- Ⓐ  $e^a$    Ⓑ  $e^{-a}$    Ⓒ  $\frac{e^a}{a-1}$    Ⓓ  $(a-1)e^a$    Ⓔ  $(a-1)e^{-a}$   
 Ⓕ  $\log a$    Ⓖ  $\frac{1}{\log a}$    Ⓗ  $\frac{\log a}{a-1}$    Ⓙ  $\frac{a-1}{\log a}$    Ⓚ  $(a-1)\log a$

• キ、サの解答群

- Ⓐ  $\frac{1}{n} \left\{ f\left(\frac{k-1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right) \right\}$   
 Ⓑ  $\frac{1}{2n} \left\{ f\left(\frac{k-1}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right) \right\}$   
 Ⓒ  $\frac{1}{3n} \left\{ f\left(\frac{k-1}{n}\right) + f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right) \right\}$   
 Ⓓ  $\frac{1}{4n} \left\{ f\left(\frac{k-1}{n}\right) + 2f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right) \right\}$   
 Ⓔ  $\frac{1}{5n} \left\{ f\left(\frac{k-1}{n}\right) + 3f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right) \right\}$   
 Ⓕ  $\frac{1}{6n} \left\{ f\left(\frac{k-1}{n}\right) + 4f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + f\left(\frac{k}{n}\right) \right\}$



• ク, シの解答群

Ⓐ  $\frac{(a^n - 1)\sqrt{a}}{n(a - 1)}$

Ⓑ  $\frac{a^{\frac{1}{2n}}(a - 1)}{n(a^{\frac{1}{n}} - 1)}$

Ⓒ  $\frac{(a + 1)(a^n - 1)}{n(a - 1)}$

Ⓓ  $\frac{(a^{\frac{1}{n}} + 1)(a - 1)}{n(a^{\frac{1}{n}} - 1)}$

Ⓔ  $\frac{(a + 1)(a^n - 1)}{2n(a - 1)}$

Ⓕ  $\frac{(a^{\frac{1}{n}} + 1)(a - 1)}{2n(a^{\frac{1}{n}} - 1)}$

Ⓖ  $\frac{(a^{\frac{1}{n}} + a^{\frac{1}{2n}} + 1)(a - 1)}{n(a^{\frac{1}{n}} - 1)}$

Ⓖ  $\frac{(a^{\frac{1}{n}} + a^{\frac{1}{2n}} + 1)(a - 1)}{3n(a^{\frac{1}{n}} - 1)}$

Ⓘ  $\frac{(a^{\frac{1}{n}} + 2a^{\frac{1}{2n}} + 1)(a - 1)}{4n(a^{\frac{1}{n}} - 1)}$

Ⓙ  $\frac{(a + 3\sqrt{a} + 1)(a^n - 1)}{5n(a - 1)}$

Ⓚ  $\frac{(a^{\frac{1}{n}} + 4a^{\frac{1}{2n}} + 1)(a - 1)}{6n(a^{\frac{1}{n}} - 1)}$