一橋大学

2016年 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ θを実数とし，数列$\{a_n\}$を

$$a_1=1,\quad a_2=\cos\theta,\quad a_{n+2}=\frac{3}{2}a_{n+1}-a_n$$

により定める．すべてのnについて$a_n=\cos(n-1)\theta$が成り立つとき，$\cos\theta$を求めよ．

漸化式より，$a_3=\frac{3}{2}a_2-a_1=\frac{3}{2}\cos\theta-1$

一方，$a_3=\cos 2\theta$ より，　$\cos 2\theta=\frac{3}{2}\cos\theta-1$ …(*) であることが必要

(*) と $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ より，$\frac{1}{2}\cos\theta(4\cos\theta-3)=0$

$\therefore\ \cos\theta=0,\ \frac{3}{4}$ であることが必要

同様に，a_4を考えることにより，$\frac{3}{2}a_3-a_2=\cos 3\theta$

$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ より，$\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\cos\theta-1\right)-\cos\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

$\therefore\ 4\cos^3\theta-\frac{17}{4}\cos\theta+\frac{3}{2}=0$

$\cos\theta=0$ のときはこれをみたさず，$\cos\theta=\frac{3}{4}$ のときはみたす．

以上より，$\cos\theta=\frac{3}{4}$ が必要で，十分性は数学的帰納法で示す．

(i) $n=1,2$ のとき

$a_1=1$，$a_2=\cos\theta=\frac{3}{4}$ であるから，$a_n=\cos(n-1)\theta$ は成り立っている．

(ii) $n=k,\ k+1$ のとき成り立つと仮定すると，

$a_k=\cos(k-1)\theta$，　$a_{k+1}=\cos k\theta$

$$\begin{aligned}
a_{k+2}&=\frac{3}{2}a_{k+1}-a_k\\
&=\frac{3}{2}\cos k\theta-\cos(k-1)\theta\\
&=\frac{3}{2}\cos\{(k+1)\theta-\theta\}-\cos\{(k+1)\theta-2\theta\}\\
&=\frac{3}{2}\{\cos(k+1)\theta\underbrace{\cos\theta}_{=\frac{3}{4}}+\sin(k+1)\theta\sin\theta\}-\cos(k+1)\theta\cos 2\theta-\sin(k+1)\theta\sin 2\theta\\
&=\frac{9}{8}\cos(k+1)\theta+\frac{3}{2}\sin(k+1)\theta\cdot\sin\theta-\cos(k+1)\theta\cdot\underbrace{(2\cos^2\theta-1)}_{=\frac{1}{8}}-\sin(k+1)\theta\cdot 2\sin\theta\underbrace{\cos\theta}_{=\frac{3}{4}}\\
&=\frac{9}{8}\cos(k+1)\theta+\frac{3}{2}\sin(k+1)\theta\sin\theta-\frac{1}{8}\cos(k+1)\theta-\frac{3}{2}\sin(k+1)\theta\sin\theta\\
&=\cos(k+1)\theta
\end{aligned}$$

$\therefore\ n=k+2$ のとき成り立つ

(i)，(ii) より，すべてのnについて，$a_n=\cos(n-1)\theta$ が成り立つ．以上より，$\underline{\cos\theta=\frac{3}{4}}$ //