0002025184797999

上智大学

2015年 TEAP利用理系 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) (i) $a>0$, $a \neq 1$, $M>0$ である実数 a, M に対し，a を底とする M の対数 $\log_a M$ の定義を述べよ．

(ii) $a>0$, $b>0$, $c>0$, $a \neq 1$, $c \neq 1$ である実数 a, b, c に対し，底の変換公式

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

が成り立つことを示せ．

(2) 正の実数 x の自然対数 $\log x$ は

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

と表される．これを用いて，正の実数 x, y に対し

$$\log(xy) = \log x + \log y$$

が成り立つことを示せ．

(1)(i) $M = a^x$ をみたす実数 x を $\log_a M$ とする //

(ii) (i)の対数の定義より，

$$a^{\log_a b} = b$$

両辺とも正なので，cを底とする対数をとると，

$$\log_c a^{\log_a b} = \log_c b$$

対数の性質より，

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$$

$a \neq 1$ より $\log_c a (\neq 0)$ で両辺割って

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad ▨$$

(2) $\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ より

$$\log(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{t}\,dt$$

$$= \int_1^x \frac{1}{t}\,dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t}\,dt$$

$\frac{t}{x} = u$ とおいて置換積分する．

t	$x \to xy$
u	$1 \to y$

，$\frac{1}{x}dt = du \Leftrightarrow \frac{1}{t}dt = \frac{1}{u}du$

$$= \int_1^x \frac{1}{t}\,dt + \int_1^y \frac{1}{u}\,du$$

$$= \log x + \log y \quad ▨$$