高知大学

2016年 教育学部 第2問

数理 石井K

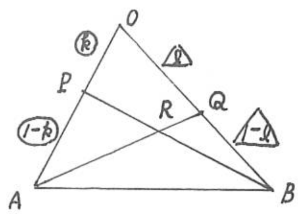
$\boxed{2}$ $0<k<1$, $0<l<1$ とする．鋭角三角形OABの辺OAを $k:(1-k)$ に内分する点をP，辺OBを $l:(1-l)$ に内分する点をQ，AQとBPの交点をRとおく．$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) P，Qが $BP\perp OA$ かつ $AQ\perp OB$ をみたすとき，k，l の値を $\vec{a}$，$\vec{b}$ のそれぞれの長さ $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$ および内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を用いて表せ．

(4) k，l が(3)の条件をみたすとき，点Rは $OR\perp AB$ をみたすかどうかを内積を計算することによって述べよ．



(1) $\overrightarrow{OP}=k\vec{a}$，$\overrightarrow{OQ}=l\vec{b}$ //

(2) メネラウスの定理より

$$\frac{1-k}{k}\cdot\frac{1}{1-l}\cdot\frac{RQ}{AR}=1$$

$$\therefore AR:RQ=1-k:k(1-l)$$

$$\therefore \overrightarrow{OR}=\frac{k(1-l)}{1-k+k(1-l)}\vec{a}+\frac{1-k}{1-k+k(1-l)}\cdot l\vec{b}$$

$$=\frac{k(1-l)}{1-kl}\vec{a}+\frac{l(1-k)}{1-kl}\vec{b}$$ //

(3) $BP\perp OA$ より，$\overrightarrow{BP}\cdot\vec{a}=0$，$AQ\perp OB$ より $\overrightarrow{AQ}\cdot\vec{b}=0$

$$\overrightarrow{BP}\cdot\vec{a}=(k\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}=k|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad \therefore k=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}$$ //

$$\overrightarrow{AQ}\cdot\vec{b}=(-\vec{a}+l\vec{b})\cdot\vec{b}=-\vec{a}\cdot\vec{b}+l|\vec{b}|^2=0 \quad \therefore l=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$ //

(4)
$$\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{AB}=\left\{\frac{k(1-l)}{1-kl}\vec{a}+\frac{l(1-k)}{1-kl}\vec{b}\right\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$

$$=-\frac{k(1-l)}{1-kl}|\vec{a}|^2+\frac{l(1-k)}{1-kl}|\vec{b}|^2+\frac{k(1-l)-l(1-k)}{1-kl}\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$=-\frac{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{a}|^2(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}+\frac{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}+\frac{|\vec{b}|^2(\vec{a}\cdot\vec{b})^2-|\vec{a}|^2(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

$$=0$$

$\therefore$ $OR\perp AB$ となる //