大阪府立大学

2011年 第2問

$\boxed{2}$ $f(x)=e^{-x}\cos x$ とする．

(1) $e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x$ を微分せよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ を求めよ．

(3) 自然数 n に対して，

$$S_n=\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{\pi}{2n}\right)+f\left(\frac{2\pi}{2n}\right)+f\left(\frac{3\pi}{2n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n\pi}{2n}\right)\right\}$$

とおく．次の式が成り立つことを示せ．

$$S_n<\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx<S_n+\frac{1}{n}$$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．