0002317452867999

大阪工業大学

2016年 工学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 関数 $f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$ について，次の問いに答えよ．

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) $f'(-\sqrt{2})$ の値を求めよ．また，$f'(x) = 0$ を解け．

(3) $f(x)$ の増減を調べ，$y = f(x)$ のグラフをかけ．ただし，凹凸は調べなくてもよい．

(4) $4 - x^2 = t$ とおき，置換積分法を用いて不定積分 $\int x\sqrt{4 - x^2}\,dx$ を求めよ．

(5) 曲線 $y = f(x)$，x 軸および直線 $x = 2$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V を求めよ．

(1) $f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{4-x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

(2) $f'(-\sqrt{2}) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$

$f'(x) = 0 \iff x = \sqrt{4-x^2}$

$\iff x \geqq 0$ かつ $x^2 = 4 - x^2$

$\iff x \geqq 0$ かつ $x^2 = 2$

$\therefore\ x = \sqrt{2}$

(3)

x	-2	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	2

上の増減表よりグラフは右のようになる．

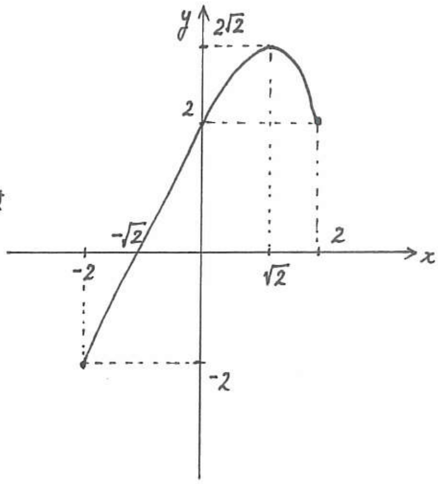
$f(x) = 0$ となるのは

$-x = \sqrt{4-x^2}$

$\therefore\ x \leqq 0$ であり

$x^2 = 4 - x^2$

$\therefore\ x = -\sqrt{2}$



(4) $4 - x^2 = t$ より $-2x\,dx = dt$，

$\therefore \int x\sqrt{4-x^2}\,dx = \int -\frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \underline{-\frac{1}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}} + C}$（$C$は積分定数）//

(5) 右上図より

$V = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{2} (x + \sqrt{4-x^2})^2\,dx$

$= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{2} 4 + 2x\sqrt{4-x^2}\,dx$　(4)より．

$= \pi \left[4x - \frac{2}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-\sqrt{2}}^{2}$

$= \pi \left(8 + 4\sqrt{2} + \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2}\right)$

$= \pi \left(8 + \frac{16}{3}\sqrt{2}\right)$

$= \underline{\frac{8}{3}\pi \left(3 + 2\sqrt{2}\right)}$ //