0001872727218999

# 電気通信大学

2014年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ を考える．

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{2n(n+1)}{3n - a_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 不等式 $a_n < n$ を数学的帰納法によって証明せよ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \dfrac{n}{n - a_n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める．$b_{n+1}$ を $b_n$ を用いて表せ．

(3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(5) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ および $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_2 a_3 a_4 \cdots a_n}{n!}$ を求めよ．

(1) 数学的帰納法により示す．

(i) $n=1$ のとき．$a_1 = 0$ より．$a_1 < n$ が成り立つ

(ii) $n = k$ のとき 成り立つと仮定すると．$a_k < k$

このとき．$a_{k+1} = \dfrac{2k(k+1)}{3k - a_k} < \dfrac{2k(k+1)}{3k-k} = k+1$ $\therefore n = k+1$ のときも成り立つ

(i)，(ii) より．$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，$a_n < n$ が成り立つ ■

(2) $b_n = \dfrac{n}{n - a_n} \iff n \cdot b_n - a_n b_n = n \iff a_n = \dfrac{n(b_n - 1)}{b_n}$ ← $b_n > 0$ より 両辺 $b_n$ で割った

与式に代入すると．$\dfrac{(n+1)\cdot(b_{n+1}-1)}{b_{n+1}} = \dfrac{2n(n+1)}{3n - \frac{n(b_n-1)}{b_n}}$

$\therefore$ これを整理すると．$\underline{b_{n+1} = 2b_n + 1}$ //

(3) $b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$ $\therefore$ 数列 $\{b_n + 1\}$ は初項 $b_1 + 1 = 2$，公比2の等比数列なので，$b_n + 1 = 2^n$ $\therefore \underline{b_n = 2^n - 1}$ //

(4) $b_n = \dfrac{n}{n - a_n}$ より．$\underline{a_n = \dfrac{n\cdot(2^n - 2)}{2^n - 1}}$ //

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n - 2}{2^n - 1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2^n}} = \underline{1}$ //

(5) のつづき．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_2 a_3 \cdots a_n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{6}^{\,2}}{\cancel{7}}\cdot\frac{\cancel{14}^{\,2}}{\cancel{15}}\cdot\frac{\cancel{30}^{\,2}}{31}\cdots\frac{2^n-2}{2^n-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}}{2^n - 1}$$

$$= \underline{\frac{1}{2}} //$$