2015年 第4問

$\boxed{4}$ 数列 $\{a_n\}$ は初項が $a_1=1$，公差が正の定数 d の等差数列とする．このとき，自然数の定数 p を用いて

$$b_n = a_n a_{n+p} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定まる数列 $\{b_n\}$ について考える．ただし，$a_n a_{n+p}$ は a_n と a_{n+p} の積を表す．以下の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{b_n\}$ の階差数列 $\{c_n\}$ が等差数列であることを示せ．さらに，数列 $\{c_n\}$ の初項 c_1 と公差 D を d，p を用いて表せ．

(2) ある定数 C を用いて

$$\frac{1}{b_n} = C\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+p}}\right) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と表すことができる．このとき，C を d，p を用いて表せ．

以下の問いでは，数列 $\{b_n\}$ が初項から順に

$$b_1=7, \quad b_2=40, \quad b_3=91, \ \cdots$$

となる場合を考える．

(3) 定数 d，p および数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ．

(4) 数列 $\{b_n\}$ に対して，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

とおく．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．