0000791818029999

愛知教育大学

2012年 第4問

4 座標空間内において，4点 $(2,\ 0,\ 0)$，$(2,\ 1,\ 0)$，$(-2,\ 1,\ 0)$，$(-2,\ 0,\ 0)$ を頂点とする長方形を x 軸のまわりに回転してできる円柱と，原点を中心とする半径2の球との共通部分の体積を求めよ．

右のグラフより.

$$V = 2\int_0^{\sqrt{3}} \pi \cdot 1^2\,dx + 2\int_{\sqrt{3}}^{2} \pi \cdot y^2\,dx$$

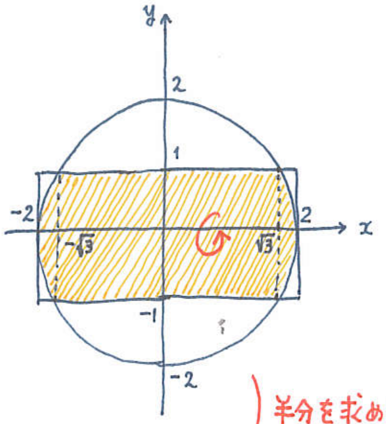
ここで円は $x^2+y^2=4 \iff y^2 = 4-x^2$ より

$$V = 2\pi \cdot \sqrt{3} + 2\pi \int_{\sqrt{3}}^{2} 4-x^2\,dx$$

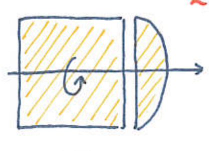
$$= 2\sqrt{3}\pi + 2\pi\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{\sqrt{3}}^{2}$$

$$= 2\sqrt{3}\pi + 2\pi\left(8 - \frac{8}{3} - 4\sqrt{3} + \sqrt{3}\right)$$

$$= \underline{\left(\frac{32}{3} - 4\sqrt{3}\right)\pi}$$ //

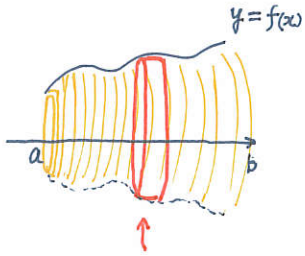


半分を求めて
2倍する.



円柱

・回転体の体積（x軸まわり）



底面の円の半径が $f(x)$
高さ dx の円柱を
たしあわせる.

$$\Rightarrow V = \int_a^b \pi \cdot \{f(x)\}^2\,dx$$

$$= \boxed{\pi\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx}$$