

2011年第2問

2 $x > 0$ において関数

$$f(x) = \sin(\log x)$$

を考える。

方程式 $f(x) = 0$ の $0 < x \leq 1$ における解を大きいほうから順にならべて、

$$1 = \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \cdots > \alpha_n > \alpha_{n+1} > \cdots$$

とする。以下の問いに答えよ。ただし、 $\log x$ は e を底とする自然対数とする。なお、不定積分の計算においては積分定数を省略してもよい。

(1) 不定積分 $I(x)$, $J(x)$ をそれぞれ

$$I(x) = \int e^x \sin x dx, \quad J(x) = \int e^x \cos x dx$$

とおくとき、 $I(x) + J(x)$, $I(x) - J(x)$ を求めよ。(2) 不定積分 $\int f(x) dx$ を求めよ。(3) α_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ。(4) 区間 $\alpha_{n+1} \leq x \leq \alpha_n$ において、曲線 $y = f(x)$ と x 軸とで囲まれる部分の面積を S_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) とする。 S_n を求めよ。(5) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和 S を求めよ。