2018年 第4問

$\boxed{4}$ a，b を定数とし，整式 $f_1(x)$ を $f_1(x)=ax+b$ と定義する．

次に，整式 $(x+1)f_1(x)$ を $2x^2-3x-2$ で割った余りを $f_2(x)$ と定義する．さらに，整式 $(x+1)f_2(x)$ を $2x^2-3x-2$ で割った余りを $f_3(x)$ と定義する．以下，このようにして，各自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，整式 $(x+1)f_n(x)$ を $2x^2-3x-2$ で割った余りを $f_{n+1}(x)$ と定義する．このとき，整式 $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ に対して，以下の問いに答えよ．

(1) 整式 $f_2(x)$ を a，b を用いて表せ．

(2) 各自然数 $n \geqq 1$ に対して，整式 $f_n(x)$ を $f_n(x)=a_nx+b_n$ とおいて，2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を定める．ただし，$a_1=a$，$b_1=b$ とする．

(i) a_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ．また，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ．

(ii) a_{n+2} を a_n，a_{n+1} を用いて表せ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を a，b を用いて表せ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ が収束するための条件を，a，b を用いて表せ．

(5) 数列 $\{a_n\}$ が発散するとき，極限値

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$$

を求めよ．