2018年第4問

 $4 \mid a, b$ を定数とし、整式 $f_1(x)$ を $f_1(x) = ax + b$ と定義する.

次に、整式 $(x+1)f_1(x)$ を $2x^2-3x-2$ で割った余りを $f_2(x)$ と定義する。さらに、整式 $(x+1)f_2(x)$ を $2x^2-3x-2$ で割った余りを $f_3(x)$ と定義する。以下、このようにして、各自然数 n=1、2、3、… に対して、整式 $(x+1)f_n(x)$ を $2x^2-3x-2$ で割った余りを $f_{n+1}(x)$ と定義する。このとき、整式 $f_n(x)$ (n=1, 2, 3, …) に対して、以下の問いに答えよ。

- (1) 整式 $f_2(x)$ を a, b を用いて表せ.
- (2) 各自然数 $n \ge 1$ に対して、整式 $f_n(x)$ を $f_n(x) = a_n x + b_n$ とおいて、2 つの数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ を定める。 ただし、 $a_1 = a$ 、 $b_1 = b$ とする。
- (i) a_{n+1} を a_n , b_n を用いて表せ. また, b_{n+1} を a_n , b_n を用いて表せ.
- (ii) a_{n+2} を a_n , a_{n+1} を用いて表せ.
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を a, b を用いて表せ.
- (4) 数列 $\{a_n\}$ が収束するための条件を, a, b を用いて表せ.
- (5) 数列 $\{a_n\}$ が発散するとき,極限値

 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$

を求めよ.