電気通信大学

2017 年 第 3 問

$\boxed{3}$ 原点を中心とする半径 3 の球面を S とする．球面 S 上に点 P$(a,\ b,\ c)$ を $a>0$，$b>0$，$c>0$ となるようにとり，以下の条件をみたす直方体 T を考える．

- 直方体 T は点 P を頂点のひとつにもつ．
- 直方体 T は球面 S に内接する．
- 直方体 T の各辺は x 軸，y 軸，z 軸のいずれかに平行である．
- 直方体 T の表面積は 64 である．

このとき，直方体 T の x 軸，y 軸，z 軸に平行な辺の長さは，それぞれ $2a$，$2b$，$2c$ である．以下の問いに答えよ．

(1) $ab+bc+ca$ と $a+b+c$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) 関数

$$f(t)=t^3-(a+b+c)t^2+(ab+bc+ca)t$$

の増減を調べ，その極値を求めよ．

(3) 直方体 T の体積を V とする．式 $(t-a)(t-b)(t-c)$ を $f(t)$ と V を用いて表せ．

(4) 体積 V のとりうる値の範囲を求めよ．

(5) 体積 V が最小となる点 P$(a,\ b,\ c)$ のうちで，$a \leqq b \leqq c$ をみたす点 P の座標を求めよ．