



2011年理学部(数)第2問

2 自然数  $a, b$  に対して,  $a = bq + r$ ,  $0 \leq r \leq b-1$  を満たす整数  $q, r$  がただ 1 組存在する. このとき  $q$  は  $a$  を  $b$  で割った商,  $r$  は  $a$  を  $b$  で割った余りという. 自然数  $a_0, a_1$  が与えられたとき, 数列  $\{a_n\}, \{q_n\}$  は次の性質を満たすものとする.

(i)  $q_n$  は  $a_{n-1}$  を  $a_n$  で割った商

$$(ii) \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

ただし,  $a_{N+1} = 0$  となる自然数  $N$  が存在すれば,  $n > N$  に対して  $q_n$  および  $a_{n+1}$  は定義しない. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1)  $a_{N+1} = 0$  となる自然数  $N$  が存在することを証明せよ.
- (2)  $a_N = aa_0 + ba_1$  を満たす整数  $a, b$  が存在することを証明せよ.
- (3)  $a_N$  は  $a_0$  と  $a_1$  の最大公約数であることを証明せよ.