

2014年 第1問

1 次の問いに答えよ.

(1) $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$ のとき, 連立方程式

$$3 \sin x - \sin y = \sqrt{3}, \quad 3 \cos x + \cos y = -1$$

を解け.

(2) a, b, c を実数とする. $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ であるとき, a, b, c のうち少なくとも1つは1に等しいことを示せ.(3) 0, 1, 2, 3, 4, 5の数字が1つずつ記入された6枚のカードが入っている箱から1枚ずつ3枚のカードを取り出し, 左から並べて自然数 n を作る時, 次の (i), (ii) に答えよ. ただし, 例えば 012 は 12 を表すものとする.(i) n が3桁の自然数になるのは何通りか.(ii) 3桁の自然数 n を作った後, 箱の中に残っている3枚のカードを左から並べて3桁の自然数 m を作る時, $n + m = 555$ となる n は何通りか.

(1) $9 \sin^2 x - 6 \sin x \sin y + \sin^2 y = 3$

+) $9 \cos^2 x + 6 \cos x \cos y + \cos^2 y = 1$

$$9 + 6(\cos x \cos y - \sin x \sin y) + 1 = 4$$

$$\therefore \cos(x+y) = -1$$

$$0 \leq x+y \leq 2\pi \text{ より } x+y = \pi$$

$$\therefore 3 \cos x + \cos(\pi - x) = -1$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \therefore x = \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore (x, y) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right)$$

〃

(2) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ より

$$ab + bc + ca = abc$$

$$\therefore (a-1)(b-1)(c-1) = (a-1)(bc-b-c+1)$$

$$= abc - ab - bc - ca + a + b + c - 1$$

$$= 0$$

$$\therefore a=1 \text{ または } b=1 \text{ または } c=1 \quad \square$$

(3) (i) $5 \times 5 \times 4 = 100$ 通り

(ii) $\{0, 5\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}$ のそれぞれから1つずつ選ぶ

また, 0の桁ともう一方の3枚の自然数の同じ位は5になる.

同様に1には4, 2には3を対応させる. 0は百の位にはこない

$$\text{以上のことから, } 2^3 \times (3! - 2) = 32 \text{ 通り}$$

〃