2016年 人文B 第4問

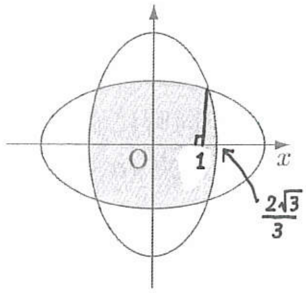
1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ 二つの楕円

$$x^2+3y^2=4,\quad 3x^2+y^2=4$$

で囲まれた図形のうち，下の図の網かけ部分として示された，原点を含む部分を D とする．



(1) D を x 軸のまわりに回転してできる図形の体積を求めなさい．

(2) D の面積を求めなさい．

(1) $x^2+3y^2=4$ …①，$3x^2+y^2=4$ …②

②×3−① より，$8x^2=8$ $\quad\therefore x=\pm 1$

∴ 交点は $(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)$

① $\Leftrightarrow$ $y^2=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}x^2$ ，② $\Leftrightarrow$ $y^2=4-3x^2$

$$\therefore V=2\pi\int_0^1 \frac{4}{3}-\frac{1}{3}x^2\,dx+2\pi\int_1^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} 4-3x^2\,dx$$

$$=2\pi\left[\frac{4}{3}x-\frac{1}{9}x^3\right]_0^1+2\pi\left[4x-x^3\right]_1^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

$$=2\pi\cdot\frac{11}{9}+2\pi\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}-\frac{8\sqrt{3}}{9}-4+1\right)$$

$$=\underline{\frac{32(\sqrt{3}-1)}{9}\pi}\,_{/\!/}$$

(2) $$S=4\int_0^1\sqrt{\frac{4-x^2}{3}}\,dx+4\int_1^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\sqrt{4-3x^2}\,dx$$

$$=\underline{\frac{4}{\sqrt{3}}\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx}+\underline{4\int_1^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\sqrt{4-3x^2}\,dx}$$

$x=2\cos\theta$ とおいて置換積分

$x=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta$ とおいて置換積分

$dx=-2\sin\theta\,d\theta$ $\quad$ $\begin{array}{c|c} x & 0\to 1 \\ \hline \theta & \frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{3}\end{array}$

$dx=-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\,d\theta$ ，$\begin{array}{c|c} x & 1\to \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \hline \theta & \frac{\pi}{6}\to 0\end{array}$

0002228631777999

福島大学

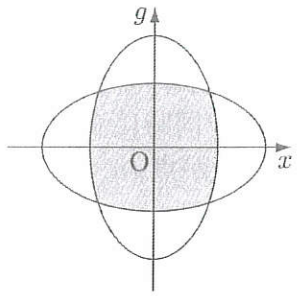
2016年 人文B 第4問　　2枚目／2枚

数理 石井K

4 二つの楕円

$$x^2+3y^2=4,\quad 3x^2+y^2=4$$

で囲まれた図形のうち，下の図の網かけ部分として示された，原点を含む部分を D とする．



(1) D を x 軸のまわりに回転してできる図形の体積を求めなさい．

(2) D の面積を求めなさい．

(2) のつづき

$$S=\frac{4}{\sqrt{3}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}2\sin\theta\cdot(-2\sin\theta\,d\theta)+4\int_{\frac{\pi}{6}}^{0}2\sin\theta\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\,d\theta\right)$$

$$=\frac{16}{\sqrt{3}}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta+\frac{16}{\sqrt{3}}\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\sin^2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{16}{\sqrt{3}}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos2\theta}{2}\,d\theta+\frac{16}{\sqrt{3}}\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-\cos2\theta}{2}\,d\theta$$

$$=\frac{16}{\sqrt{3}}\left[\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{16}{\sqrt{3}}\left[\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\sin2\theta\right]_{0}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{16}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{16}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{12}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\underline{\frac{8\sqrt{3}}{9}\pi}$$ //