佐賀大学

2015年 医学部 第1問　　1枚目/2枚目

数理 石井K

$\boxed{1}$ a, bは定数であり，$0 < a < b$とする．定積分

$$I = \int_0^1 a^{1-t}b^t\,dt$$

について，次の問に答えよ．

(1) Iを求めよ．

(2) $0 \leqq t \leqq 1$のとき，

$$a^{1-t}b^t + a^tb^{1-t} \geqq 2\sqrt{ab}$$

であることを示せ．また，$I > \sqrt{ab}$を示せ．

(3) $0 < t < 1$とする．$x > 1$のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$x^t < 1 + t(x-1)$$

(4) (3)の不等式を利用して，$I < \dfrac{a+b}{2}$を示せ．

(1) $(a^x)' = a^x \log a$ であるから

$$I = \int_0^1 a^{1-t}\cdot a^t \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^t dt$$

$$= a\int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^t dt$$

$$= a\left[\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^t}{\log\frac{b}{a}}\right]_0^1$$

$$= a\left(\frac{\frac{b}{a}-1}{\log b - \log a}\right) \to \underline{\frac{b-a}{\log b - \log a}}\ //$$

(2) $0<a<b$ より，$a^{1-t}b^t > 0$，$a^tb^{1-t} > 0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$$a^{1-t}b^t + a^tb^{1-t} \geqq 2\sqrt{a^{1-t}b^t\cdot a^tb^{1-t}}$$

$$= 2\sqrt{ab} \quad ▨$$

等号が成立するのは，$a^{1-t}b^t = a^tb^{1-t} \iff a^{2t-1} = b^{2t-1}$

$\iff (2t-1)(\log a - \log b) = 0$ （両辺対数をとった）

$\iff t = \frac{1}{2}$ または $a = b$

$0<a<b$より，等号成立条件は，$t = \frac{1}{2}$

$x = 1-t$として置換積分する $dx = -dt$，$\begin{array}{c|c} t & 0\to 1 \\ \hline x & 1\to 0\end{array}$

$$I = \int_1^0 a^x b^{1-x}(-dx) = \int_0^1 a^x b^{1-x}\,dx \quad \cdots (*)$$

∴ 上の不等式を区間$[0,1]$で積分して，

$$\int_0^1 a^{1-t}b^t + a^tb^{1-t}\,dt > \int_0^1 2\sqrt{ab}\,dt$$

（不等式の等号が成り立つのは $t=\frac{1}{2}$ のみなので，ここでは等号は成り立たない）

$(*)$より，$2I > 2\sqrt{ab}$

$$\therefore I > \sqrt{ab} \quad ▨$$

2015年 医学部 第1問　2枚目／2枚

1　a，b は定数であり，$0 < a < b$ とする．定積分

$$I = \int_0^1 a^{1-t} b^t \, dt$$

について，次の問に答えよ．

(1) I を求めよ．

(2) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき，

$$a^{1-t}b^t + a^t b^{1-t} \geqq 2\sqrt{ab}$$

であることを示せ．また，$I > \sqrt{ab}$ を示せ．

(3) $0 < t < 1$ とする．$x > 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$x^t < 1 + t(x-1)$$

(4) (3)の不等式を利用して，$I < \dfrac{a+b}{2}$ を示せ．

(3) $f(x) = 1 + t(x-1) - x^t$ とおくと，

$f'(x) = t - tx^{t-1}$

$= t(1 - x^{t-1})$

> 0　（$0<t<1$ より，$-1<t-1<0$，また $x>1$ であるから $0<x^{t-1}<1$）

$\therefore$ $f(x)$ は（$x>1$ において）単調増加で，$f(x) > f(1) = 0$

$\therefore$ $x>1$ において，$x^t < 1 + t(x-1)$　■

(4) $I = \int_0^1 a^{1-t} \cdot a^t \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^t dt$

$= a\int_0^1 \left(\frac{b}{a}\right)^t dt$

$< a\int_0^1 1 + t\left(\frac{b}{a} - 1\right) dt$　（(3)の不等式を使った）

$= a \cdot \left[t + \frac{t^2}{2}\left(\frac{b}{a} - 1\right) \right]_0^1$

$= a\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a} - 1\right)\right)$

$= \frac{a+b}{2}$　■