2016年 理系 第3問　　1枚目／2枚

数理 石井K

3　次の問いに答えよ.

(1) 自然数 n に対して $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x}\,dx$ を求めよ.

(2) $x>0$ のとき，不等式 $x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<x$ が成り立つことを示せ.

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x+\log(1+x)}\,dx$ を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x}\,dx = \Big[\log|x|\Big]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}$

$= \log\frac{2}{n} - \log\frac{1}{n}$

$= \log 2 - \log n - (-\log n)$

$= \underline{\log 2}$ //

(2) $f(x) = \log(1+x) - \left(x - \dfrac{x^2}{2}\right)$, $g(x) = x - \log(1+x)$ とおくと,

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x = \dfrac{x^2}{1+x}$

∴ $x>0$ のとき. $f'(x)>0$　∴ $f(x)$ は単調増加より, $f(x) > f(0) = 0$

∴ $x>0$ において, $x - \dfrac{x^2}{2} < \log(1+x)$ が成り立つ

$g'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$

∴ $x>0$ のとき. $g'(x)>0$　∴ $g(x)$ は単調増加より, $g(x) > g(0) = 0$

∴ $x>0$ において, $\log(1+x) < x$ が成り立つ

以上より, 与えられた不等式は成り立つ ▨

(3) (2)の不等式より. $x>0$ のとき. $\dfrac{1}{2x} < \dfrac{1}{x+\log(1+x)} < \dfrac{1}{2x-\frac{x^2}{2}}$

$$\therefore \underbrace{\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{2x}\,dx}_{} < \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x+\log(1+x)}\,dx < \underbrace{\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{2}{4x-x^2}\,dx}_{} \quad \cdots ①$$

(1)より. $\frac{1}{2}\log 2$

ここで, $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{2}{4x-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4-x}\right)dx$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\Big[\log|4-x|\Big]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}$

琉球大学

2016年 理系 第3問　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ．

(1) 自然数 n に対して $\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x}\,dx$ を求めよ．

(2) $x>0$ のとき，不等式 $x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<x$ が成り立つことを示せ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x+\log(1+x)}\,dx$ を求めよ．

(3)のつづき．

$$\therefore \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{2}{4x-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{2}\log\frac{4-\frac{2}{n}}{4-\frac{1}{n}}$$

$\therefore$ $n\to\infty$ のとき．

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\log 2,\quad \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{2}{4x-x^2}\,dx \to \frac{1}{2}\log 2$$

①において，はさみうちの原理より．

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \frac{1}{x+\log(1+x)}\,dx = \underline{\frac{1}{2}\log 2}\ _{//}$$