東京女子大学

2014 年 現代教養 第 8 問

数理 石井K

$\boxed{8}$ $f(x) = \dfrac{1}{e^x+1} - \dfrac{1}{3}$ として $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ の最大値とそのときの x の値を求めよ.

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{e^t+1} - \int_0^x \frac{1}{3}\,dt$$

$s = e^t + 1$ とおいて置換積分する

t	$0 \to x$
s	$2 \to e^x+1$

$ds = e^t \cdot dt \Leftrightarrow \dfrac{ds}{s-1} = dt$

$$\therefore F(x) = \int_2^{e^x+1} \frac{1}{s}\cdot\frac{ds}{s-1} - \left[\frac{t}{3}\right]_0^x$$

$$= \int_2^{e^x+1} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\,ds - \frac{x}{3}$$

$$= \Big[\log|s-1| - \log|s|\Big]_2^{e^x+1} - \frac{x}{3}$$

$$= x - \log(e^x+1) + \log 2 - \frac{x}{3}$$

$$= \frac{2}{3}x - \log(e^x+1) + \log 2 \quad \cdots (*)$$

$$\therefore F'(x) = \frac{2}{3} - \frac{e^x}{e^x+1}$$

$F'(x) = 0$ となるのは, $e^x = 2$ すなわち $x = \log 2$

x	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$
$F'(x)$	$+$	0	$-$
$F(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

$\therefore$ 右の増減表より, $F(x)$ の最大値は $(*)$ を使って

$$F(\log 2) = \frac{2}{3}\log 2 - \log 3 + \log 2$$

$$= \underline{\frac{5}{3}\log 2 - \log 3 \quad (x = \log 2 \text{ のとき})}$$