福岡大学

2014年 工・薬学部 第5問

数理 石井K

5 数列 $\{a_n\}$ が，$a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+2}=\dfrac{(a_{n+1})^3}{(a_n)^2}$ を満たしている．$b_n=\log_3 a_n$ とおくとき，b_{n+2} を b_{n+1}，b_n を用いて表すと $b_{n+2}=$ $\boxed{}$ となる．また，$b_n=$ $\boxed{}$ である．

$3b_{n+1}-2b_n$　　$2^{n-1}-1$

$a_{n+2}=\dfrac{(a_{n+1})^3}{(a_n)^2}$ の両辺 対数（底は3）をとると．

$$\log_3 a_{n+2}=\log_3\frac{(a_{n+1})^3}{(a_n)^2}$$

$$\therefore\ \log_3 a_{n+2}=3\log_3 a_{n+1}-2\log_3 a_n$$

$$\therefore\ b_{n+2}=\underline{3b_{n+1}-2b_n}\ /\!/$$

メモ．
$\alpha^2-3\alpha+2=0$
$(\alpha-2)(\alpha-1)=0$
$\alpha=1,2$

特性方程式（メモにとどめる）

$$\therefore\ b_{n+2}-b_{n+1}=2(b_{n+1}-b_n)$$

∴ 数列 $\{b_{n+1}-b_n\}$ は 初項 $b_2-b_1=\log_3 a_2-\log_3 a_1=1$，
公比 2 の等比数列

$$\therefore\ b_{n+1}-b_n=2^{n-1}\ \cdots ①$$

また，$b_{n+2}-2b_{n+1}=b_{n+1}-2b_n$

∴ 数列 $\{b_{n+1}-2b_n\}$ は 初項 $b_2-2b_1=\log_3 a_2-2\log_3 a_1=1$，
公比 1 の等比数列

$$\therefore\ b_{n+1}-2b_n=1\ \cdots ②$$

①，② より，$\underline{b_n=2^{n-1}-1}\ /\!/$