

2015年 経済情報 第4問


 数理解石井

4 $a > 3$ とし、座標平面上に円 $C: x^2 + y^2 = 9$ と点 $P(a, 0)$ がある。このとき次の問いに答えなさい。

- (1) 円 C 上に点 $Q(x_0, y_0)$ をとり、線分 PQ を $1:2$ に内分する点を R とする。このとき点 R の座標を a, x_0, y_0 を用いて表しなさい。
 (2) 点 Q が円 C 上を動くとき、点 R の軌跡の方程式を求めなさい。
 (3) (2) で求めた点 R の軌跡と円 C の共有点が 1 つのみであるとき、共有点の座標と a の値を求めなさい。

$$(1) R\left(\frac{x_0+2a}{1+2}, \frac{y_0+0}{1+2}\right) \quad \therefore R\left(\frac{x_0+2a}{3}, \frac{y_0}{3}\right) \quad "$$

(2) $R(x, y)$ とおくと。

$$x = \frac{x_0+2a}{3}, \quad y = \frac{y_0}{3}$$

$$\therefore x_0 = 3x - 2a, \quad y_0 = 3y$$

点 Q は円 C 上の点より $x_0^2 + y_0^2 = 9$

$$\therefore (3x - 2a)^2 + (3y)^2 = 9$$

$$\therefore \left(x - \frac{2}{3}a\right)^2 + y^2 = 1$$

逆にこの図形上の任意の点は条件をみたす。

$$\therefore \text{求める方程式は } \underline{\left(x - \frac{2}{3}a\right)^2 + y^2 = 1} \quad "$$

(3) (2) の方程式は中心 $\left(\frac{2}{3}a, 0\right)$ 、半径 1 の円を表す。これを円 C' とすると。

C と C' がちょうど 1 つの共有点をもつのは。

C' が C に内接する場合と外接する場合があるので。

$$\frac{2}{3}a - 0 = 3 - 1 \quad \text{または} \quad \frac{2}{3}a - 0 = 3 + 1$$

(内接)

(外接)

$$\therefore a = 3, 6 \quad \text{ここで } a > 3 \text{ より } a = 6$$

$$\therefore \underline{\text{共有点 } (3, 0), a = 6} \quad "$$

