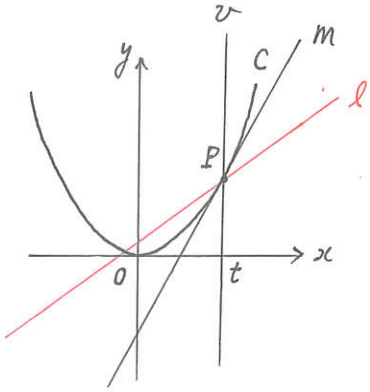
大阪府立大学

2015年 文系 第3問

$\boxed{3}$ a を正の定数とする．放物線 $C : y = ax^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ at^2)$（ただし $t \neq 0$）に対して，C の P での接線を m，P を通り，y 軸に平行な直線を v とする．直線 m に関して v を対称移動した直線を ℓ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) ℓ の傾きを，a，t を用いて表せ．

(2) ℓ の y 切片は t によらず一定であることを示せ．



(1) $y' = 2ax$ より　$m : y = 2at(x-t) + at^2$

$\therefore\ m : y = 2atx - at^2$

$v : x = t$

m と v のなす角を θ とおく $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

また m と x 軸の正の方向がなす角を α とおくと．

$$\tan\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{2at}$$

$$\therefore\ \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{4at}{4a^2t^2-1}$$

$\therefore$ ℓ の傾きは．$\tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) = \dfrac{1}{\tan 2\theta} = at - \dfrac{1}{4at}$

(2) (1)より ℓ の方程式は．

$$y = \left(at - \frac{1}{4at}\right)(x-t) + at^2$$

$$= \left(at - \frac{1}{4at}\right)x + \frac{1}{4a}$$

$\therefore$ y 切片は $\dfrac{1}{4a}$ となり．t によらず一定である ▨