0001690639038999

新潟大学

2014年 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ a を $a \geqq 0$ となる実数とし，θ の関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta) = 2\sin 2\theta + 4a(\cos\theta - \sin\theta) + 1$$

とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $t = \cos\theta - \sin\theta$ とおく．このとき，$f(\theta)$ を a，t を用いて表せ．

(2) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，t のとりうる値の範囲を求めよ．

(3) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$f(\theta)$ の最大値と最小値を a を用いて表せ．

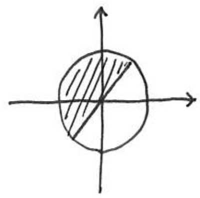
(1) $t^2 = 1 - 2\sin\theta\cos\theta$ より．$\sin 2\theta = 1 - t^2$

$\therefore f(\theta) = 2 - 2t^2 + 4at + 1$

$= \underline{-2t^2 + 4at + 3}$ //

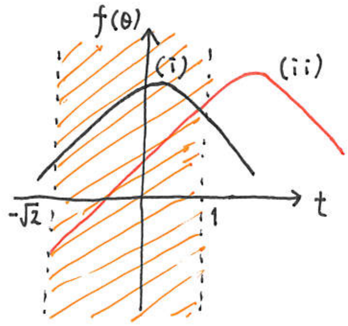
(2) $t = \sqrt{2}\left(\cos\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= \sqrt{2}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$



$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より，$\frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{5}{4}\pi$

$\therefore \underline{-\sqrt{2} \leqq t \leqq 1}$ //



(3) (1) より

$$f(\theta) = -2(t-a)^2 + 2a^2 + 3 \quad (-\sqrt{2} \leqq t \leqq 1)$$

(i) $0 \leqq a < 1$ のとき

最大値 $2a^2 + 3$ ($t = a$ のとき)

最小値 $-4\sqrt{2}a - 1$ ($t = -\sqrt{2}$ のとき)

(ii) $a \geqq 1$ のとき

最大値 $4a + 1$ ($t = 1$ のとき)

最小値 $-4\sqrt{2}a - 1$ ($t = -\sqrt{2}$ のとき)

以上より 最大値 $\begin{cases} 2a^2 + 3 & (0 \leqq a < 1) \\ 4a + 1 & (a \geqq 1) \end{cases}$ 最小値 $-4\sqrt{2}a - 1$ //