

2015年医学部第4問

4 xy 平面上に直線 $l: y = \frac{1}{2}x$ がある。自然数 n に対して、この平面上に、正方形 $A_n B_n C_n D_n$ を次のように定める。

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 \left(\frac{1}{3}, 0 \right) \\ \text{正方形の頂点は時計回りに } A_n, B_n, C_n, D_n \text{ とする。} \\ \text{頂点 } A_n, D_n \text{ は } x \text{ 軸上にあり、頂点 } B_n \text{ は直線 } l \text{ 上にある。} \\ \text{頂点 } A_n \text{ の } x \text{ 座標は頂点 } D_n \text{ の } x \text{ 座標より小さい。} \\ \text{頂点 } D_n \text{ を頂点 } A_{n+1} \text{ とする。} \end{array} \right.$$

頂点 A_n の x 座標を x_n 、正方形 $A_n B_n C_n D_n$ の面積を S_n とする。

(1) 正方形 $A_n B_n C_n D_n$ の1辺の長さは $\frac{\text{ア}}{\text{イ}} x_n$ である。

また、正方形 $A_n B_n C_n D_n$ の対角線の交点の座標は $\left(\frac{\text{ウ}}{\text{エ}} x_n, \frac{\text{オ}}{\text{カ}} x_n \right)$ であるから、すべての自然数 n に対して正方形 $A_n B_n C_n D_n$ の対角線の交点は直線 $y = \frac{\text{キ}}{\text{ク}} x$ 上にある。

(2) x_{n+1} を x_n で表すと $x_{n+1} = \frac{\text{ケ}}{\text{コ}} x_n$ である。よって $x_n = \frac{3}{2} \frac{\text{サ}}{\text{シ}}$ である。ただし、 サ 、 シ には、次の①～⑥の中から最も適切なものをそれぞれ一つ選ぶこと。

- ① $-n-1$ ② $-n$ ③ $n-2$ ④ $n-1$ ⑤ n ⑥ $n+1$

(3) $T_n = \sum_{k=1}^n S_k$ とおく。 $T_n > 1$ となる最小の n は ス である。