2014 年 医学部 第 4 問

$\boxed{4}$ 行列 $A=r\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 f について考える．点 P_0 の座標を $(1,\ 0)$ とし，n を正の整数とするとき，f によって点 P_{n-1} が移される点を P_n とする．また，$\sum_{k=0}^{n-1}\overrightarrow{\mathrm{OP}_k}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}$ となる点 Q_n の座標を $(x_n,\ y_n)$ とし，$n\to\infty$ のときに x_n，y_n がともに収束する場合の点 Q_n の極限値 $\mathrm{Q}\left(\lim_{n\to\infty}x_n,\ \lim_{n\to\infty}y_n\right)$ を求めよう．

(1) $r=\dfrac{1}{2}$，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$A^3=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\begin{pmatrix}\boxed{\text{エ}} & \boxed{\text{オ}}\\ \boxed{\text{オ}} & \boxed{\text{エ}}\end{pmatrix}$ であり，P_7 の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キクケ}}},\ \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{キクケ}}}\right)$ である．

(2) $E-A$ が逆行列をもたない r，θ $(r\geqq 0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ の条件は，$r=\boxed{\text{サ}}$ かつ $\theta=\boxed{\text{シ}}$ である．ただし，E は単位行列とする．

$E-A$ が逆行列をもつとき，n を 2 以上の整数とすると

$(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{n-1})=E-A^n$ より

$$E+A+A^2+\cdots+A^{n-1}=(E-A)^{-1}(E-A^n)$$

また，$(E-A)^{-1}=\dfrac{1}{r^2-2r\cos\theta+1}\begin{pmatrix}1-r\cos\theta & -r\sin\theta\\ r\sin\theta & 1-r\cos\theta\end{pmatrix}$ であるから

$(E-A)^{-1}(E-A^n)=\dfrac{1}{r^2-2r\cos\theta+1}T$ とすると

$$T=\begin{pmatrix}1-r\cos\theta-r^n\boxed{\text{ス}}+r^{n+1}\boxed{\text{セ}} & -r\sin\theta+r^n\boxed{\text{ソ}}-r^{n+1}\boxed{\text{タ}}\\ r\sin\theta-r^n\boxed{\text{ソ}}+r^{n+1}\boxed{\text{タ}} & 1-r\cos\theta-r^n\boxed{\text{ス}}+r^{n+1}\boxed{\text{セ}}\end{pmatrix}$$

である．ただし，$\boxed{\text{ス}}$，$\boxed{\text{セ}}$，$\boxed{\text{ソ}}$，$\boxed{\text{タ}}$ には，次の ①～⑥ の中から最も適切なものをそれぞれ一つ選ぶこと．なお，同じ選択肢を選んでもよいものとする．

① $\sin n\theta$　② $\cos n\theta$　③ $\sin(n-1)\theta$　④ $\cos(n-1)\theta$　⑤ $\sin(n+1)\theta$　⑥ $\cos(n+1)\theta$

$0\leqq r<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}x_n$，$\lim_{n\to\infty}y_n$ はともに収束し，さらに $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ とすると，

$$\mathrm{Q}=\left(\frac{\boxed{\text{チ}}-r}{\boxed{\text{ツ}}-2r+\boxed{\text{テ}}r^2},\ \frac{\sqrt{\boxed{\text{ト}}}\,r}{\boxed{\text{ツ}}-2r+\boxed{\text{テ}}r^2}\right)$$

である．