

2015年医学部第5問

5 $x > -1$ で定義された関数 $f(x)$ は、等式

$$(x+1)f(x) - \int_0^x f(t) dt = \log(x+1) + x - 1$$

を満たしている。

(1) このとき $f(0) =$ であり、さらに

$$f'(x) = \frac{x + \text{ウ}}{(x + \text{エ}) \text{オ}}$$

である。

(2) これをもとに $f(x)$ を求めると $f(x) =$ $-$ である。ただし、, には、次の①～⑥の中から最も適切なものをそれぞれ一つ選ぶこと。なお、同じ選択肢を選んでもよいものとする。

- ① $\log x$ ② $\log(x+1)$ ③ $x \log(x+1)$ ④ $\frac{1}{x}$ ⑤ $\frac{1}{x+1}$ ⑥ $\frac{x}{x+1}$

(3) $a > 0$ とする。関数 $g(x) = \log x$ について、区間 $[a, a+1]$ で平均値の定理を用いると、 $g(a+1) - g(a) =$ となる実数の定数 c が区間 に存在する。これを用いると自然数 m に対する $f(e^m)$ と m の大小は $f(e^m)$ m となることがわかる。ただし、, には、次の選択肢 I の①～⑦の中から、 には、選択肢 II の①～③の中から最も適切なものをそれぞれ一つずつ選ぶこと。

選択肢 I

- ① c ② $c+1$ ③ $\frac{1}{c}$ ④ $\frac{1}{c+1}$ ⑤ $\log c$
 ⑥ $[a, a+1]$ ⑦ $(a, a+1)$

選択肢 II

- ① $<$ ② $>$ ③ $=$

(4) さらに

$$\int_0^{e^x-1} f(t) dt = (x - \text{サ})(e^x - \text{シ})$$

となるので、自然数 n に対して $p(n) = e^{\frac{2}{3n}} - 1$ とおくと

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^{p(n)} f(t) dt = \frac{\text{スセ}}{\text{ソ}}$$

である。