

2016年医学部第5問

5 xy 平面上的放物線 $y = x^2$ の $0 \leq x \leq 1$ に対応する部分の長さを L とする. L の値を次のようにして求めよう. L は定積分

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \boxed{\text{ア}} x^2} dx$$

で定まる. この定積分を計算するために $x = \frac{e^t - e^{-t}}{4}$ として, 置換積分を行う. このとき

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e^t + e^{-t}}{4}$$

であり

$$\sqrt{1 + \boxed{\text{ア}} x^2} = \frac{e^t + e^{-t}}{\boxed{\text{イ}}}$$

である.

また, $\frac{e^t - e^{-t}}{4} = 1$ となる t の値を α とすると, x が $0 \rightarrow 1$ と変化するとき, t は $\boxed{\text{ウ}} \rightarrow \alpha$ と変化するので, L を定める定積分は

$$L = \frac{1}{\boxed{\text{エ}}} \int_{\boxed{\text{ウ}}}^{\alpha} (e^t + e^{-t}) \boxed{\text{オ}} dt$$

となる. ここで $X = e^\alpha$ とおくと, X は2次方程式

$$X^2 - \boxed{\text{カ}} X - \boxed{\text{キ}} = 0$$

の解である. $X > 0$ なので

$$X = \boxed{\text{ク}} + \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$$

である. これを用いて α の値を定め, L の値を計算すると

$$L = \frac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}} + \frac{1}{\boxed{\text{シ}}} \log(\boxed{\text{ス}} + \sqrt{\boxed{\text{セ}}})$$

である.