0001909180908999

同志社大学

2014年 理系全学部日程 第2問

$\boxed{2}$ 座標空間内の球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 上に3点 A(3, 0, 0), B(2, 1, 2), C(1, −2, 2) をとる．次の問いに答えよ．

(1) △ABC の面積を求めよ．

(2) 3点 A, B, C を通る平面に，原点 O から下ろした垂線の足 H の座標を求めよ．

(3) 球面上を動く点 P を頂点とする四面体 PABC を考え，その体積を V とする．V の最大値と，そのときの点 P の座標を求めよ．

(1) $\overrightarrow{AB}=(-1,1,2)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,-2,2)$ より．$|\overrightarrow{AB}|^2=1+1+4=6$, $|\overrightarrow{AC}|^2=4+4+4=12$

$$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{6\cdot 12-(2-2+4)^2}$$

$$=\underline{\sqrt{14}}\ //$$

(2) H は平面 ABC 上にあるので，$\overrightarrow{AH}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$ と表せる．

$\therefore \overrightarrow{AH}=(-m-2n,\ m-2n,\ 2m+2n)$　$\therefore \overrightarrow{OH}=(3-m-2n,\ m-2n,\ 2m+2n)$

OH が平面 ABC に垂直に交わることから．$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

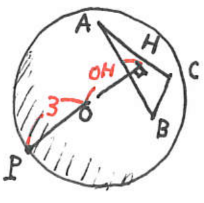
$\therefore \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=-3+m+2n+m-2n+4m+4n=0$　$\therefore 6m+4n=3 \cdots ①$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=-6+2m+4n-2m+4n+4m+4n=0$　$\therefore 4m+12n=6 \cdots ②$

①，② より．$m=\frac{3}{14}$，$n=\frac{3}{7}$　$\therefore \underline{H\left(\frac{27}{14},\ -\frac{9}{14},\ \frac{9}{7}\right)}\ //$

(3) 直線 OH と球面との交点のうち．O が含まれる方を P とすれば．

V は最大となる．



$|\overrightarrow{OH}|^2=\left(\frac{27}{14}\right)^2+\left(-\frac{9}{14}\right)^2+\left(\frac{9}{7}\right)^2=\frac{81}{14}$　$\therefore |\overrightarrow{OH}|=\frac{9}{\sqrt{14}}$

$\therefore V=\triangle ABC\times(OH+3)\times\frac{1}{3}=\underline{3+\sqrt{14}}\ //$

このとき．$\overrightarrow{OP}=\frac{-3}{OH}\cdot\overrightarrow{OH}=-\frac{\sqrt{14}}{3}\left(\frac{27}{14},\ -\frac{9}{14},\ \frac{9}{7}\right)$

$$\therefore \underline{P\left(-\frac{9}{\sqrt{14}},\ \frac{3}{\sqrt{14}},\ -\frac{6}{\sqrt{14}}\right)}\ //$$