同志社大学

2016年 理系全学部日程 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(u)=\log(\sqrt{u}-1)-\log(\sqrt{u}+1)$ の導関数 $f'(u)$ を求めよ．

(2) 関数 $F(x)=\log(\sqrt{e^{2x}+1}-1)-\log(\sqrt{e^{2x}+1}+1)$ の導関数 $F'(x)$ を求めよ．

(3) 等式 $\sqrt{e^{2x}+1}=\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}}$ を用いて，不定積分 $\displaystyle\int\sqrt{e^{2x}+1}\,dx$ を求めよ．

(4) 曲線 $y=e^x$ $\left(\dfrac{1}{2}\log 8\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}\log 24\right)$ の長さを求めよ．

(1) $f'(u)=\dfrac{(\sqrt{u}-1)'}{\sqrt{u}-1}-\dfrac{(\sqrt{u}+1)'}{\sqrt{u}+1}$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{u}(\sqrt{u}-1)}-\dfrac{1}{2\sqrt{u}(\sqrt{u}+1)}$

$=\underline{\dfrac{1}{\sqrt{u}(u-1)}}$ //

(2) $u=e^{2x}+1$ とおくと，$F(x)=f(u)$

$\therefore F'(x)=\dfrac{d}{dx}F(x)$

$=\dfrac{d}{du}f(u)\cdot\dfrac{du}{dx}$

$\dfrac{du}{dx}=2e^{2x}$，(1)より，

$F'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}\cdot e^{2x}}\cdot 2e^{2x}$

$=\underline{\dfrac{2}{\sqrt{e^{2x}+1}}}$ //

(4) 長さをLとすると，

$L=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}\log 8}^{\frac{1}{2}\log 24}\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1}\,dx$

$=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}\log 8}^{\frac{1}{2}\log 24}\sqrt{e^{2x}+1}\,dx$

(3)より．

$=\left[\sqrt{e^{2x}+1}+\frac{1}{2}\left\{\log(\sqrt{e^{2x}+1}-1)-\log(\sqrt{e^{2x}+1}+1)\right\}\right]_{\frac{1}{2}\log 8}^{\frac{1}{2}\log 24}$

$=5+\frac{1}{2}(\log 4-\log 6)-3-\frac{1}{2}(\log 2-\log 4)$

$=2+2\log 2-\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{2}\log 6$

$=\underline{2+\log 2-\frac{1}{2}\log 3}$ //

(3) $(\sqrt{e^{2x}+1})'=\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+1}}$，(2)より，$\dfrac{1}{2}F'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}}$ なので

$\displaystyle\int\sqrt{e^{2x}+1}\,dx=\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+1}}+\frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}}\,dx$

$=\underline{\sqrt{e^{2x}+1}+\frac{1}{2}\left\{\log(\sqrt{e^{2x}+1}-1)-\log(\sqrt{e^{2x}+1}+1)\right\}+C}$ (Cは積分定数) //