福岡大学

2012年 工・薬学部 第9問

$\boxed{9}$ $f(x)=\dfrac{(\log x)^2}{x}$ $(x>0)$ とする．曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ と点 $\mathrm{Q}(b,\ f(b))$ における曲線 C の2つの接線が共に原点を通るとき，次の問いに答えよ．ただし，$a<b$ で，対数は自然対数とする．

(1) a, b の値と点 $\mathrm{Q}(b,\ f(b))$ における曲線 C の法線の方程式を求めよ．

(2) 点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ における C の接線，点 $\mathrm{Q}(b,\ f(b))$ における C の法線，および曲線 C によって囲まれる部分の面積を求めよ．

(1) 接点を $(t,\ f(t))$ とおくと，

接線は $f'(x)=\dfrac{2\cdot\frac{1}{x}\cdot\log x\cdot x-(\log x)^2\cdot 1}{x^2}=\dfrac{\log x(2-\log x)}{x^2}$ であることより

$$y=\frac{\log t(2-\log t)}{t^2}(x-t)+\frac{(\log t)^2}{t}$$

これが原点を通ることより， $0=-\dfrac{2\log t-(\log t)^2}{t}+\dfrac{(\log t)^2}{t}$

$\therefore \log t(2\log t-2)=0$ $\quad\therefore t=1,\ e$ $\quad\therefore \underline{a=1,\ b=e}$ //

Qにおける C の接線の傾きは． $f'(e)=\dfrac{1}{e^2}$

$\therefore$ 法線は $y=-e^2(x-e)+\dfrac{1}{e}$ $\quad\therefore \underline{y=-e^2x+e^3+\dfrac{1}{e}}$ //

(2) $f'(1)=0$ より Pにおける C の接線は． $y=0$

また右の増減表よりグラフは右下のようになる

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$

$$\therefore S=\int_1^e\frac{(\log x)^2}{x}dx+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{e^3}$$

$$=\left[\frac{1}{3}(\log x)^3\right]_1^e+\frac{1}{2e^4}$$

$$=\underline{\frac{1}{3}+\frac{1}{2e^4}}$$ //