同志社大学

2014年 文学部・経済学部 第1問　1枚目/2枚

数理 石井K

1 次の $\boxed{}$ に適する数または式を記入せよ．

a を実数とする．極値を持つ3次関数 $f(x)=x^3-ax$ について考える．3次関数 $y=f(x)$ が極値を持つための a の満たすべき条件は $\boxed{ア}$ であり，そのとき，極小値は $\boxed{イ}$ である．このとき，座標平面で曲線 $C: y=f(x)$ 上の原点以外の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における曲線 C の接線 L の方程式は $\boxed{ウ}$ と表せる．また，曲線 C と接線 L の点 P 以外の共有点 Q の x 座標 q は，$q=\boxed{エ}$ となる．また，点 P と異なる曲線 C 上の点 $\mathrm{R}(r,\ f(r))$ における接線が接線 L と平行であるとき，$r=\boxed{オ}$ である．△PQR の面積 M を求めると $M=\boxed{カ}$ である．さらに，曲線 C を x 軸正の方向に t $(t>0)$ だけ平行移動した曲線を D とするとき，この2曲線 C と D とが異なる2つの共有点を持つための t の満たすべき条件は $\boxed{キ}$ である．そのときの2つの共有点の x 座標を α, β $(\alpha<\beta)$ とすると，$\alpha=\boxed{ク}$ であり，$\beta=\boxed{ケ}$ となる．このとき，2曲線 C と D とで囲まれる図形の面積 S を求めると $S=\boxed{コ}$ である．

$f'(x)=3x^2-a$　$\therefore$ $3x^2-a=0$ が異なる2つの実数解をもてばよいので

求める条件は．$\underline{a>0}$ // ア

x	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

右の増減表より．極小値は．

$f\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)=\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}-a\sqrt{\frac{a}{3}}=\underline{-\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}}}$ // イ

$L: y=(3p^2-a)(x-p)+p^3-ap$　$\therefore$ $\underline{L: y=(3p^2-a)x-2p^3}$ // ウ

$x^3-3p^2x+2p^3=0$　$\therefore$ $(x-p)^2(x+2p)=0$　$\therefore$ $\underline{q=-2p}$ // エ

$3x^2-a=3p^2-a$ より　$3(x-p)(x+p)=0$　$\therefore$ $x=\pm p$ より　$\underline{r=-p}$ // オ

$\mathrm{P}(p,\ p^3-ap)$，$\mathrm{Q}(-2p,\ -8p^3+2ap)$，$\mathrm{R}(-p,\ -p^3+ap)$

R が原点にくるように平行移動させると．

$\mathrm{P}'(2p,\ 2p^3-2ap)$，$\mathrm{Q}'(-p,\ -7p^3+ap)$，$\mathrm{R}'(0,0)$

$\therefore$ $M=\frac{1}{2}\left|-14p^4+2ap^2+2p^4-2ap^2\right|$

$=\underline{6p^4}$ // カ

$D: y=(x-t)^3-a(x-t)$ より．$(x-t)^3-a(x-t)-x^3+ax=0$ が異なる2つの実数解をもつので，$3tx^2-3t^2x+t^3-at=0$ の判別式を D_1 とおくと．

$D_1=9t^4-4\cdot 3t(t^3-at)>0$　　$t>0$ より，$\underline{0<t<2\sqrt{a}}$ // キ

2014 年 文学部・経済学部 第 1 問

2枚目／2枚

数理 石井K

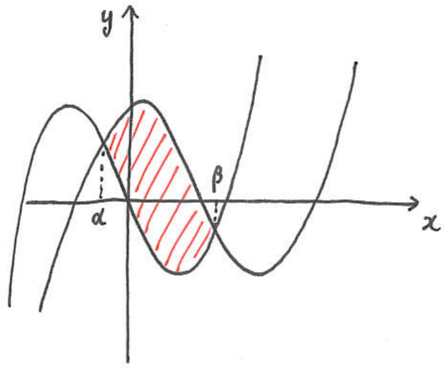
1 次の $\boxed{}$ に適する数または式を記入せよ.

a を実数とする. 極値を持つ 3 次関数 $f(x) = x^3 - ax$ について考える. 3 次関数 $y = f(x)$ が極値を持つための a の満たすべき条件は $\boxed{ア}$ であり, そのとき, 極小値は $\boxed{イ}$ である. このとき, 座標平面で曲線 $C : y = f(x)$ 上の原点以外の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における曲線 C の接線 L の方程式は $\boxed{ウ}$ と表せる. また, 曲線 C と接線 L の点 P 以外の共有点 Q の x 座標 q は, $q = \boxed{エ}$ となる. また, 点 P と異なる曲線 C 上の点 $\mathrm{R}(r,\ f(r))$ における接線が接線 L と平行であるとき, $r = \boxed{オ}$ である. △PQR の面積 M を求めると $M = \boxed{カ}$ である. さらに, 曲線 C を x 軸正の方向に t $(t > 0)$ だけ平行移動した曲線を D とするとき, この 2 曲線 C と D とが異なる 2 つの共有点を持つための t の満たすべき条件は $\boxed{キ}$ である. そのときの 2 つの共有点の x 座標を α, β $(\alpha < \beta)$ とすると, $\alpha = \boxed{ク}$ であり, $\beta = \boxed{ケ}$ となる. このとき, 2 曲線 C と D とで囲まれる図形の面積 S を求めると $S = \boxed{コ}$ である.

つづき.

$3tx^2 - 3t^2x + t^3 - at = 0$ の解は, $x = \dfrac{3t^2 \pm \sqrt{-3t^4 + 12at^2}}{6t} = \dfrac{3t \pm \sqrt{-3t^2 + 12a}}{6}$

$\therefore\ \alpha = \dfrac{3t - \sqrt{-3t^2+12a}}{6}$, $\beta = \dfrac{3t + \sqrt{-3t^2+12a}}{6}$ // ク, ケ



$$S = \int_\alpha^\beta (x-t)^3 - a(x-t) - x^3 + ax \ dx$$

$$= \int_\alpha^\beta -3t(x-\alpha)(x-\beta)\ dx$$

$$= \frac{1}{2}t(\beta-\alpha)^3$$

$$= \frac{1}{2}t\left(\frac{\sqrt{-3t^2+12a}}{3}\right)^3$$

$$= \frac{t}{54}(-3t^2+12a)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}t}{18}(-t^2+4a)^{\frac{3}{2}}$$ // コ