0002064185397999

同志社大学

2015年 理系全学部日程 第2問

和・積の公式の導出からやったのであれですが，
覚えていることを前提とすれば もっとすっきりします．

数理 石井K

2 α は $0<\alpha<\pi$ を満たす実数，n，k は正整数として，次の問いに答えよ．

(1) $\sin\dfrac{\alpha}{2n}\sin\dfrac{k\alpha}{n}$ を $\cos\dfrac{(2k-1)\alpha}{2n}$ と $\cos\dfrac{(2k+1)\alpha}{2n}$ を用いて表せ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k\alpha}{n}$ と極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\sin\dfrac{\alpha}{2n}$ を求めよ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{k\alpha}{n}$ を求めよ．

(1) 加法定理より，

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y \quad \cdots①$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y \quad \cdots②$$

②−① より，$\cos(x-y)-\cos(x+y)=2\sin x\sin y \quad \cdots③$

$$\therefore \sin x\sin y=\frac{1}{2}\{\cos(x-y)-\cos(x+y)\}$$

$x=\dfrac{\alpha}{2n}$，$y=\dfrac{k\alpha}{n}$ を代入して，$\sin\dfrac{\alpha}{2n}\sin\dfrac{k\alpha}{n}=\dfrac{1}{2}\left\{\cos\dfrac{(1-2k)\alpha}{2n}-\cos\dfrac{(2k+1)\alpha}{2n}\right\}$

$$=\underline{\frac{1}{2}\left\{\cos\frac{(2k-1)\alpha}{2n}-\cos\frac{(2k+1)\alpha}{2n}\right\}}\ //$$

(2) (1)より，

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\alpha}{2n}\sin\frac{k\alpha}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left\{\cos\frac{(2k-1)\alpha}{2n}-\cos\frac{(2k+1)\alpha}{2n}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\cos\frac{\alpha}{2n}-\cancel{\cos\frac{3\alpha}{2n}}+\cancel{\cos\frac{3\alpha}{2n}}-\cancel{\cos\frac{5\alpha}{2n}}+\cancel{\cos\frac{5\alpha}{2n}}-\cdots+\cancel{\cos\frac{(2n-1)\alpha}{2n}}-\cos\frac{(2n+1)\alpha}{2n}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\cos\frac{\alpha}{2n}-\cos\frac{(2n+1)\alpha}{2n}\right\} \quad \cdots④$$

③において，$A=x-y$，$B=x+y$ とおくと，$x=\dfrac{A+B}{2}$，$y=\dfrac{B-A}{2}$ なので

$$\cos A-\cos B=2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}$$

これに，$A=\dfrac{\alpha}{2n}$，$B=\dfrac{(2n+1)\alpha}{2n}$ を代入して，④より，

$$\sin\frac{\alpha}{2n}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\alpha}{n}=\sin\frac{(n+1)\alpha}{2n}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$$

両辺を $\sin\dfrac{\alpha}{2n}\ (\neq 0)$ で割って，$\displaystyle\underline{\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\alpha}{n}=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2n}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2n}}}\ //$

$$\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{\alpha}{2n}=\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{\sin\frac{\alpha}{2n}}{\frac{\alpha}{2n}}}_{\to 1}\times\frac{\alpha}{2}=\underline{\frac{\alpha}{2}}\ //$$

(3)は上に書きました．

(3) $(与式)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\alpha}{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2n}\sin\frac{\alpha}{2}}{\underbrace{n\sin\frac{\alpha}{2n}}_{\to\frac{\alpha}{2}}}\quad(\because (2)より)$$

$$=\underline{\frac{2}{\alpha}\sin^2\frac{\alpha}{2}}\ //$$

(別) 区分求積法により

$(与式)=\displaystyle\int_0^1\sin\alpha x\,dx$

$$=\left[-\frac{1}{\alpha}\cos\alpha x\right]_0^1$$

$$=-\frac{1}{\alpha}\cos\alpha+\frac{1}{\alpha}$$

$$=\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$=\underline{\frac{2}{\alpha}\sin^2\frac{\alpha}{2}}\ //$$