同志社大学

2015年 理系全学部日程 第5問

数理 石井K

5 （選択）行列 A を

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) 行列 A の表す1次変換が点 $(2,\ 1)$ を点 P_1 に移すとする．P_1 の座標を求めよ．

(2) 次の等式が成立する実数 $k,\ t$ の組をすべて求めよ．

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k \\ kt \end{pmatrix}$$

(3) A^2 を求めよ．

(4) 行列 A^n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の表す1次変換が点 $(2,\ 1)$ を点 P_n に移すとする．P_{2m-1} $(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の座標を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} \\ -1+2\sqrt{3} \end{pmatrix}$ $\quad \therefore \underline{P_1(2+\sqrt{3},\ -1+2\sqrt{3})}$ //

(2) (左辺) $=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3}t \\ \sqrt{3}-t \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{cases} 1+\sqrt{3}t=k \\ \sqrt{3}-t=kt \end{cases}$ $\quad \therefore \sqrt{3}-t=t+\sqrt{3}t^2$

$\therefore \sqrt{3}t^2+2t-\sqrt{3}=0$

$\therefore (\sqrt{3}t-1)(t+\sqrt{3})=0 \quad \therefore t=\frac{\sqrt{3}}{3},\ -\sqrt{3}$

$\therefore \underline{(k,t)=\left(2,\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\ (-2,-\sqrt{3})}$ //

(3) $A^2=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}$ //

(4) $A^{2m-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=P_{2m-1}$, $\quad A^{2m-1}=4A^{2m-3}=4^2A^{2m-5}=\cdots=4^{m-1}A$

$\therefore P_{2m-1}=4^{m-1}A\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$=4^{m-1}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} \\ -1+2\sqrt{3} \end{pmatrix}$ $\quad \therefore \underline{P_{2m-1}\left(4^{m-1}(2+\sqrt{3}),\ 4^{m-1}(-1+2\sqrt{3})\right)}$ //