弘前大学

2012年 理系 第6問

数理 石井K

$\boxed{6}$ xy 平面上の楕円 $4x^2+9y^2=36$ を C とする.

(1) 直線 $y=ax+b$ が楕円 C に接するための条件を a と b の式で表せ.

(2) 楕円 C の外部の点 P から C に引いた2本の接線が直交するような点 P の軌跡を求めよ.

(1) $y=ax+b$ を楕円の方程式に代入して.

$$4x^2+9(ax+b)^2=36$$

$$\therefore (4+9a^2)x^2+18abx+9b^2-36=0$$

この方程式が重解をもつので, 判別式を D とおくと,

$$\frac{D}{4}=(9ab)^2-(4+9a^2)(9b^2-36)$$

$$=81a^2b^2-(36b^2-144+81a^2b^2-324a^2)$$

$$=36(9a^2-b^2+4)$$

$$\therefore \underline{9a^2-b^2+4=0} \ //$$

(2) 2本の直交する接線を $y=ax+b$ と $y=-\frac{1}{a}x+c$ $(a\neq 0)$ とおくと.

これらの交点は, $ax+b=-\frac{1}{a}x+c$ より. $\left(\frac{a(c-b)}{a^2+1},\ \frac{a^2c+b}{a^2+1}\right)$

ここで (1) の結果より.

$$9a^2-b^2+4=0,\quad \frac{9}{a^2}-c^2+4=0 \quad \cdots ①$$

$\therefore$ 交点を (X, Y) とおくと.

$$X^2+Y^2=\frac{a^2c^2-2a^2bc+a^2b^2+a^4c^2+2bca^2+b^2}{(a^2+1)^2}$$

$$=\frac{a^2b^2+a^2c^2+a^4c^2+b^2}{(a^2+1)^2}$$

① より. b^2, c^2 を消去して.

$$=\frac{(a^2+1)b^2+a^2c^2(a^2+1)}{(a^2+1)^2}$$

$$=\frac{b^2+a^2c^2}{a^2+1}$$

$$=13$$

$\therefore X^2+Y^2=13$

ただし $a\neq 0$ より.

$(\pm 3, \pm 2)$ を除く.

$a=0$ のときは.

$(X, Y)=(\pm 3, \pm 2)$ となるので

あわせると.

P の軌跡は $\underline{円\ x^2+y^2=13}$ //