

2015年 環境情報学部 第1問

1 n を自然数とする. 表と裏が $\frac{1}{2}$ の確率で出現するコインを n 回繰り返し投げる試行をおこなう. 各試行に対して n 個の数 X_1, \dots, X_n をつぎのように定義する.

$$X_i = \begin{cases} X_{i-1} + 1 & (i \text{ 回目の結果が表の場合}) \\ X_{i-1} + 2 & (i \text{ 回目の結果が裏の場合}) \end{cases}$$

ただし $X_0 = 0$ とする. X_1, X_2, \dots, X_n のいずれかが値 k ($1 \leq k \leq 2n$) と等しくなる確率を $P(n, k)$ と記す. 例えば, $n = 1$ ならば $P(1, 1) = \frac{1}{2}$, $P(1, 2) = \frac{1}{2}$ となる. $n = 2$ ならば $P(2, 1) = \frac{1}{2}$, $P(2, 4) = \frac{1}{2}$ となる.

$3 \leq k \leq n$ とする. $X_i = k$ となるのは, $X_{i-1} = k-1$ で i 回目の結果が表となるか, あるいは $X_{i-1} = k-2$ で i 回目の結果が裏となるかのいずれかの場合である. したがって

$$P(n, k) = \frac{3}{4} P(n, k-1) + \frac{5}{6} P(n, k-2) \quad (3 \leq k \leq n)$$

が成り立つ.

いまコインを 10 回投げる試行を考える. このとき

$$P(10, 2) = \frac{7}{8}, \quad P(10, 5) = \frac{9}{11} \frac{10}{12}$$

である.