

2014年人文学部第3問

 数理  
石井K

 3  $0 \leq \theta < 2\pi$  のとき、関数  $y = \sin^3 \theta + \cos^3 \theta$  について、次の間に答えよ。

- (1)  $\sin \theta + \cos \theta = t$  とおくと、 $y = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t$  であることを示せ。  
 (2)  $y$  の最大値、最小値を求めよ。また、そのときの  $\theta$  の値を求めよ。

$$(1) 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = t^2 \text{ より } \sin \theta \cos \theta = \frac{t^2 - 1}{2} \text{ となる}$$

$$y = (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$$

$$= t \cdot \left(1 - \frac{t^2 - 1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t \quad \blacksquare$$

$$(2) t = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \text{ より } -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(1) \text{ より } y' = -\frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}$$

$$= -\frac{3}{2}(t+1)(t-1)$$

$t$	$-\sqrt{2}$	...	$-1$	...	$1$	...	$\sqrt{2}$
$y'$			$-$	$+$	$0$	$-$	
$y$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\downarrow$	$-1$	$\nearrow$	$1$	$\downarrow$
							$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\therefore \begin{cases} \text{最大値 } 1 & (\theta = 0, \frac{\pi}{2}) \\ \text{最小値 } -1 & (\theta = \pi, \frac{3}{2}\pi) \end{cases}$$


---

$$\sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \theta = 0, \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \theta + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \pi, \frac{3}{2}\pi$$