立教大学

2014 年 理学部（個別日程）第 2 問

$\boxed{2}$ k を実数とし，座標平面上の 2 つの曲線

$$C_1 : y = k\cos x, \quad C_2 : y = \sin 2x$$

を考える．このとき，次の問に答えよ．

(1) C_1，C_2 が $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において共有点をもつとき，k の取りうる値の範囲を求めよ．

以下では k が (1) の条件を満たすものとし，$0 < x < \frac{\pi}{2}$ における C_1，C_2 の共有点の x 座標を a とおく．このとき，次の問に答えよ．

(2) $\sin a$ を k を用いて表せ．

(3) 座標平面上の $0 \leqq x \leqq a$ の部分において，C_1，C_2 および y 軸によって囲まれる図形の面積を S_1 とする．S_1 を k を用いて表せ．

(4) 座標平面上の $a \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ の部分において，C_1，C_2 によって囲まれる図形の面積を S_2 とする．S_2 を k を用いて表せ．

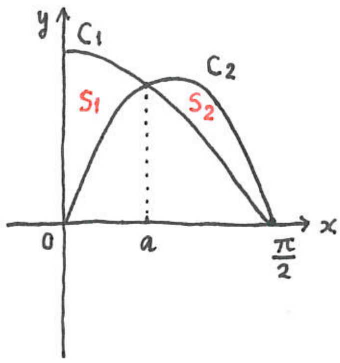
(5) k が (1) で求めた範囲を動くとき，$S_1 + S_2$ の最小値を求めよ．

(1) $\sin 2x - k\cos x = 0$

$2\cos x\left(\sin x - \frac{k}{2}\right) = 0$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ より，$\cos x > 0$ なので，$\sin x = \frac{k}{2}$ が解をもてばよい．

よって，$0 < \frac{k}{2} < 1$ すなわち，$\underline{0 < k < 2}$ //



(2) (1) より，$\underline{\sin a = \frac{k}{2}}$ //

$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$

$= 1 - \frac{1}{2}k^2$

(3) $S_1 = \int_0^a k\cos x - \sin 2x \, dx$

$= \left[k\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^a$

$= k\sin a + \frac{1}{2}\cos 2a - \frac{1}{2}$

$= \underline{\frac{k^2}{4}}$ //

(4) $S_2 = \int_a^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x - k\cos x \, dx$

$= \left[-\frac{1}{2}\cos 2x - k\sin x\right]_a^{\frac{\pi}{2}}$

$= \underline{\frac{k^2}{4} - k + 1}$ //

(5) $S_1 + S_2 = \frac{1}{2}k^2 - k + 1$

$= \frac{1}{2}(k-1)^2 + \frac{1}{2}$

$0 < k < 2$ をみたす．

∴ 最小値は $\underline{\frac{1}{2}\ (k = 1 \text{ のとき})}$ //