島根大学

2016年 教育・生物資源科学部 第3問　　1枚目/2枚

3 p, q, α, βを実数とし，$p>0$, $q>0$, $\alpha<\beta$とする．2次関数 $f(x)=p^2(x-\alpha)^2$ と $g(x)=q^2(x-\beta)^2$ について，次の問いに答えよ．

(1) 2つの放物線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点の x 座標で，α と β の間にあるものを求めよ．

(2) $\alpha \leqq x \leqq \beta$ において，2つの放物線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(3) $pq=1$ であるとき，S を最大にする p, q の値を求めよ．

(1) $f(x)-g(x)=0 \iff \{p(x-\alpha)\}^2-\{q(x-\beta)\}^2=0$

$$\iff \{p(x-\alpha)+q(x-\beta)\}\{p(x-\alpha)-q(x-\beta)\}=0$$

$$\iff \{(p+q)x-(p\alpha+q\beta)\}\{(p-q)x-(p\alpha-q\beta)\}=0$$

(i) $p \neq q$ のとき．$x=\dfrac{p\alpha+q\beta}{p+q}$, $\dfrac{p\alpha-q\beta}{p-q}$

(ii) $p=q$ のとき．$x=\dfrac{p\alpha+q\beta}{p+q}$

$$\left(\frac{p\alpha+q\beta}{p+q}-\alpha\right)\left(\frac{p\alpha+q\beta}{p+q}-\beta\right)=\left(\frac{p\alpha+q\beta}{p+q}\right)^2-(\alpha+\beta)\cdot\frac{p\alpha+q\beta}{p+q}+\alpha\beta$$

$$=\frac{-(\alpha-\beta)^2pq}{(p+q)^2}$$

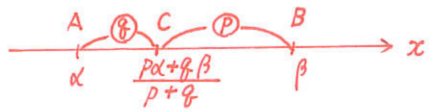
$$<0$$

qを$-q$におきかえると
計算が省略できる

$$\left(\frac{p\alpha-q\beta}{p-q}-\alpha\right)\left(\frac{p\alpha-q\beta}{p-q}-\beta\right)=\frac{(\alpha-\beta)^2pq}{(p-q)^2}$$

$$>0$$

よって，αとβの間にあるのは，$\underline{x=\dfrac{p\alpha+q\beta}{p+q}}$ //



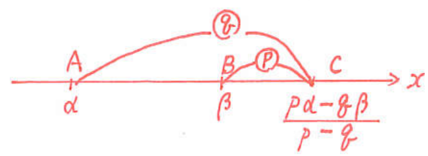
(1)の別解．

数直線上で，A(α)，B(β)とすると．

$\dfrac{p\alpha+q\beta}{p+q}$ が表す点は．線分ABを $q:p$ に内分する点，

$\dfrac{p\alpha-q\beta}{p-q}$ が表す点は．線分ABを $q:p$ に外分する点，

よって，αとβの間にあるのは．$\dfrac{p\alpha+q\beta}{p+q}$ である．



($q>p$ のとき)

島根大学

2016年 教育・生物資源科学部 第3問　2枚目／2枚

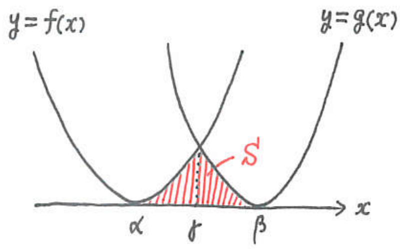
数理 石井K

$\boxed{3}$ p, q, α, βを実数とし，$p>0$, $q>0$, $\alpha<\beta$とする．2次関数$f(x)=p^2(x-\alpha)^2$と$g(x)=q^2(x-\beta)^2$について，次の問いに答えよ．

(1) 2つの放物線$y=f(x)$と$y=g(x)$の交点のx座標で，αとβの間にあるものを求めよ．

(2) $\alpha \leqq x \leqq \beta$において，2つの放物線$y=f(x)$, $y=g(x)$とx軸とで囲まれた部分の面積Sを求めよ．

(3) $pq=1$であるとき，Sを最大にするp, qの値を求めよ．



(2) (1)で求めたものをγとおくと，

$$S=\int_\alpha^\gamma p^2(x-\alpha)^2\,dx+\int_\gamma^\beta q^2(x-\beta)^2\,dx$$

$$=\left[\frac{p^2}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^\gamma+\left[\frac{q^2}{3}(x-\beta)^3\right]_\gamma^\beta$$

$$=\frac{p^2}{3}(\gamma-\alpha)^3-\frac{q^2}{3}(\gamma-\beta)^3$$

$$=\frac{p^2}{3}\left(\frac{p\alpha+q\beta}{p+q}-\alpha\right)^3-\frac{q^2}{3}\left(\frac{p\alpha+q\beta}{p+q}-\beta\right)^3$$

$$=\frac{p^2}{3}\left\{\frac{q(\beta-\alpha)}{p+q}\right\}^3-\frac{q^2}{3}\left\{\frac{p(\alpha-\beta)}{p+q}\right\}^3$$

$$=\underline{\frac{p^2q^2(\beta-\alpha)^3}{3(p+q)^2}}\ //$$

(3) $pq=1$のとき．$S=\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{3\left(p+\frac{1}{p}\right)^2}$

∴ Sが最大となるのは．$p+\dfrac{1}{p}$が最小のときであるから

相加・相乗平均の関係より，

$$p+\frac{1}{p}\geqq 2\sqrt{p\cdot\frac{1}{p}}=2 \quad (\text{等号成立は } p=1 \text{ のとき})$$

よって，Sが最大となるのは，$\underline{p=1,\ q=1}$ のとき //